Det Sanne, det Bevisbare og det Avgjørbare

Tore Fjetland Øgaard

Innhold

Forord

Dette notatet er skrevet delvis for min egen del - for å summere opp hovedpunktene i kurset *Matematisk logikk* som jeg tok høsten 2008. Innholdet i notatet, men ikke nødvendigvis all presentasjon av innholdet, er derfor også nesten utelukkende stjålet fra boken *A Friendly Introduction to Mathematical Logic* av Christopher Leary. Den andre grunnen er å gi en *tour de force* av metamatematiske resultater for logikkinteresserte filosofivenner. Notatet forutsetter at en har litt erfaring med elementær logikk og en del tålmodighet. Vi kommer til å møte på en del definisjoner, men vi hopper over bevis for en del sentrale setninger som f.eks. sunnhet og kompletthet når tilstrekkelig beskrivelse av slike setninger er tilstrekkelig for å forstå det som jeg ønsker å formidle, nemlig teoremene til Gödel, Turing og Tarski samt noen modellteoretiske resultater, som f.eks. Löwenheim-Skolem teoremene, som kan hjelper en å forstå en, per dags dato, populær retning i matematisk filosofi, nemlig strukturalisme. Dog når vi først setter oss fore å bevise noe, så er det lagt vinn på å ta umaken på alvor. Teoremene til de overnevnte sier hhv.: 1) Det finnes sanne tall-teoretiske setninger som ikke er bevisbare fra aksiomene til tallteori, 2) en kan ikke mekanisk bekrefte at en ikke bevisbar setning ikke er bevisbar - mengden av bevisbare setninger er ikke rekursiv, og 3) det finnes ingen tallteoretisk setning som er sann om, som definerer, kun alle tallteoretiske sanne setninger - en sier at sannhet ikke er aritmetisk.

Hvis noen andre en meg skulle finne på å lese dette, så merk at dette ikke er en erstatning for andre bøker. Hvis jeg har klart å hjelpe en oppfatning eller to om logiske språk, modellteori, tallenes vesen og væren eller lignende, så tror jeg vi bør være fornøyde. Logikk er i mye og mangt et praktisk fag i den forstand at det må terpes og indoktrines inn i fingrene. De som vil gjøre ting skikkelig, kan jobbe seg gjennom boken til Leary etterpå - boken anbefales på det varmeste!

Vi kommer til å bruke det som kalles et aksiomatisk bevissystem. Generelt er det et herk å gjøre bevis i slike system, men det burde ikke, etter min mening, være et herk å lese slike bevis. Mens Leary ofte tar snarveier, særlig i bevisene for ufullstendighet, har jeg lagt vinn på å være mer pedantisk i mine bevis. Dette resulterer i at vi trenger flere lemma og også å utvide bevissystemet til Leary litt. Jeg håper leseren, etter å ha blitt plaget gjennom litt for mange slike lemma, tilgir meg når ufullstendighetens klarhet skinner gjennom vårt pedantiske bevis.

Hvis noen skulle finne noen av de feilene som høyst sannsynlig finnes, er jeg takknemlig for å bli gjort oppmerksom på dette. God lesning.

Oslo, Januar 2009.

1 Alle setninger i dette notatet er sanne

Av angst for å ha kommet i skade for å påstå noe usant, begynner vi med følgende teorem:

Löbs teorem - uformell versjon. *Alle setninger i dette notatet er sanne.*

Bevis. La S være setningen 'hvis S er sann, da er alle setninger i dette notatet sanne'. Anta nå at S er en sann setning. Det følger da at 'hvis S er sann, da er alle setninger i dette notatet sanne' er en sann setning. Vi slutter fra dette at hvis S er sann, da er alle setninger i dette notatet sanne. Siden vi har antatt at S er sann, slutter vi at alle setninger i dette notatet er sanne. Dermed kan vi slutte at *dersom* S er sann, da er alle setninger i dette notatet sanne. Vi vet altså at 'hvis S er sann, da er alle setninger i dette notatet sanne' er en sann setning. Med andre ord er S en sann setning. Dermed følger det at alle setninger i dette notatet er sanne. QED. □

2 Mengder - et ekstensjonelt manifest

Dette avsnittet er tatt med for å sikre at alle har rimelige oppfatninger om hva mengder, relasjoner, funksjoner og tellbarhet er og ikke er. Innholdet er et minimum av det alle, filosof som matematiker, burde kunne om mengdelære, og dekker det vi trenger i det kommende.

Matematikk blir som oftest presentert som det ekstensjonelle *par excellence*, og det blir ofte hevdet at alle matematiske objekter lar seg redusere til mengdelærens monoontiske kategori. Alt er mengder. Hva vil det så si at noe er ekstensjonelt bestemt? Litt upresist så betyr dette at meningen til et utsagn, dets sannhetsbetingelser, samt betydningen av navn, og predikater, er utelukkende bestemt av objektene. Predikatene 'trekant' og 'tresidet' kan i euklidsk geometri appliseres på nøyaktig de samme objektene. De har samme ekstensjon, som altså ikke er annet enn objektene termene er sanne om, og siden de to egenskapene, 'trekanthet' og 'tresidethet', har samme ekstensjon, blir de, i reduktiv ekstensjonell ånd, sett på som de samme egenskapene. Predikater betegner altså objekter på lik linje med navn. Forskjellen er at predikater betegner *mengder av* objekter. Men hva er så en mengde?

2.1 Mengder - en kakeoppskrift

Man tager en håndfull objekter som står laglig tilgjengelige til for hogg, la oss si Kari og Per, setter navnene på disse ved siden av hverandre slik, 'Kari', 'Per', og omfavner dem med klammeparenteser således: {'Kari', 'Per'}. Vi har nå lage en representasjon *mengden* av Kari og Per, mengden som har Kari og Per som *elementer*. Litt mer presist betegner vi mengden av en ansamling objekter ved enten, innkapslet i klammeparenteser, liste navnene på objektene slik som i eksempelet over, eller ved å bestemme en egenskap som alle objektene må oppfylle. Mengden av alle naturlige tall, $\mathbb{N}$, kan en betegne med '$\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$'.[1] Mengden av alle partall kan enten liste opp slik; $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$, eller bestemme en egenskap som alle elementene må tilfredsstille, f.eks. 'å være lik to ganger et naturlig tall'. Dette skriver vi '$\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} \land x = 2 \cdot y\}$', og leses 'mengden av alle naturlige tall x, slik at det finnes et naturlig tall y og x er lik to ganger y'. Tegnet '$\in$' skal altså bety 'medlem av'.[2]

Dersom A og B er mengder, sier vi at A er en delmengde av B dersom alle elementene i A også er elementer i B. I så tilfellet skriver vi '$A \subseteq B$'. Hvis vi vil poengtere at B inneholder elementer som ikke er i A kan vi skrive '$A \subset B$'. I notasjonen over kan vi formulere '$A \subseteq B$' slik: '$\{x \in B \mid x \in A\}$'. Det finnes en og bare en mengde som er delmengde av enhver mengde, nemlig den tomme mengden, som vi betegner med tegnet '$\emptyset$'. En kan slå sammen mengder også. Vi kaller mengden av alle ting som er i A eller i B for *unionen* av A og B, og skriver '$A \cup B$', eller '$\{x \mid x \in A \lor x \in B\}$'. Hvis vi ønsker å betegne alle ting som både er med i A og i B, *interseksjonen* av A og B, skriver en '$A \cap B$', eller '$\{x \mid x \in A \land x \in B\}$'. Av og til hender det også at vi vil snakke om alle de tingene som er i B, men ikke i A, *differansen*. Denne mengden betegnes '$B - A$', '$B \setminus A$', eller '$\{x \in B \mid x \notin A\}$'.

Den siste operasjonen på mengder som vi trenger er *potensmengde* operatoren $\mathcal{P}$. Dersom A er en mengde, da er $\mathcal{P}(A)$ mengden av alle delmengder av A. Et eksempel: anta at vi har en mengde $A = \{a, b, c\}$. Hva er så $\mathcal{P}(A)$? Svare er at $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. Den årvåkne vil se at det finnes 2^3 elementer i $\mathcal{P}(A)$. Dette er et generelt fenomen. Dersom en mengde D har n elementer, da har $\mathcal{P}(D)$ 2^n elementer.

2.2 Relasjoner

Relasjoner kommer i forskjellige varianter. Noen relasjoner omhandler kun ett objekt. Slike kalles *unære* relasjoner. 'Ballen er rund' er en setning der et objekt, ballen, blir tilegnet den unære relasjonen 'å være rund', eller 'rundhet'. Andre relaterer to eller flere objekter til hverandre. Slike kalles *binære, ternære, …, n-ære* relasjoner. Siden relasjoner er bestemt av deres ekstensjon, er altså en unær relasjon over mengden A en hvilken som helst delmengde av A. Hva er så en binær relasjon over A? Jo det er enhver delmengde av *par* fra $A^2 = A \times A = \{\langle a_1, a_2\rangle \mid a_1, a_2 \in A\}$. Identitetsrelasjonen over A er altså $\{\langle a, a\rangle \mid a \in A\} \subset A^2$. Dersom A og B er to forskjellige mengder er altså $A \times B = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A \land b \in B\}$. En n-ær relasjon over A er da enhver

[1]Det er verdt å merke seg at mengder ikke har noen struktur. Det er ingenting som sier at det første elementet i $\mathbb{N}$ er 0.

[2]For novisen: Symbolene '$\neg$', '$\lor$', '$\land$', '$\rightarrow$', '$\leftrightarrow$' '$\forall$', og '$\exists$' skal intuitivt stå for hhv. 'ikke', 'eller', 'hvis _ så _', 'hvis og bare hvis' (forkortet 'hviss'), 'for alle', og 'det eksisterer'.

delmengde av $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ `}A\text{'-er}} = \{\langle a_1, a_2, \ldots a_n \rangle \mid a_i \in A\}$. Objekter slik som $\langle a_1, a_2, \ldots a_n \rangle$ kalles n-tupler, par dersom $n = 2$, tripler dersom $n = 3$, osv. Tupler kan også sees på som mengder ved la $\langle\rangle =_{def} \epsilon$,[3] $\langle a \rangle =_{def} a$, $\langle a_1, a_2 \rangle =_{def} \{\{a\}, \{a, b\}\}$, og sist ved rekursjon; $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} \rangle =_{def} \langle \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle, a_{n+1} \rangle$.

Forskjellige lærebøker bruker samme ord på forskjellige ting. Her er én måte å klassifisere en relasjon på:

1	$\forall x(R(x,x))$	Refleksiv
2.	$\forall x(\neg R(x,x))$	Irrefleksiv
3.	$\forall x \forall y(R(x,y) \to R(y,x))$	Symmetrisk
4.	$\forall x \forall y(R(x,y) \to \neg R(y,x))$	Asymmetrisk
5.	$\forall x \forall y([R(x,y) \land R(y,x)] \to x = y)$	Antisymmetrisk
6.	$\forall x \forall y \forall z([R(x,y) \land R(y,z)] \to R(x,z))$	Transitiv
7.	$\forall x \forall y(R(x,y) \lor R(y,x))$	Total
8.	$\forall x \forall y(R(x,y) \lor R(y,x) \lor x = y)$	Trikotomi

Ekvivalensrelasjon. *Vi sier at en relasjon R er en* ekvivalensrelasjon *dersom den er refleksiv, symmetrisk, og transitiv.*

Eksempel: Identitetsrelasjonen er en ekvivalensrelasjon.

Skarp partiell ordning. *Vi sier at en relasjon R er en* skap partiell ordning *dersom den er asymmetrisk og transitiv.*

Eksempel: Streng delmengderelasjon, '$\subset$', er en skarp partiell ordning.

Sløv partiell ordning. *Vi sier at en relasjon R er en* sløv partiell ordning *dersom den er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv.*

Eksempel: Delmengderelasjonen, '$\subseteq$', er en sløv partiell ordning.

Skarp total ordning. *Vi sier at en relasjon R er en* skarp total ordning *dersom den er transitiv og oppfyller trikotomi.*

'$<$'-relasjonen på f.eks. de naturlige tallene er en skarp total ordning.

Sløv total ordning. *Vi sier at en relasjon R er en* sløv total ordning *dersom den er total, antisymmetrisk og transitiv.*

'$\leq$'-relasjonen på f.eks. de naturlige tallene er en skarp total ordning.

Lineær ordning. *Vi sier at en relasjon R er en* lineær ordning *dersom den er irrefleksiv, transitiv, og tilfredsstiller trikotomi.*

[3] 'ϵ' brukes ofte til betegne den tomme strengen; ordet uten noen bokstaver.

Velordning. *Vi sier at en relasjon R er en* total ordning *av A dersom den er en lineær ordning, og det ikke finnes elementer $a_1, a_2, \ldots, a_n, \cdots \in A$ slik at $\ldots a_n R a_{n-1} R a_{n-2} \ldots a_3 R a_2 R a_1$. Altså at det ikke finnes en uendelig R-avtagende rekke.*

'$<$' er en total ordning på $\mathbb{N}$, men ikke $\mathbb{Z}$, siden $0, -1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$ er en uendelig $<$-avtagende rekke. Dog er '$<$' en lineær ordning av $\mathbb{Z}$.

Hvis vi lar id_A være identitetsrelasjonen på A og R en relasjon over A, da går R fra å være en skarp til en sløv relasjon ved å legge til id_A, og fra sløv til skarp ved å trekke fra id_A. Videre impliserer det at R er en hhv. skarp eller sløv total ordning, at R er en hhv. skarp eller sløv partiell ordning, men ikke omvendt. Vi kommer kun til å få bruk for å vite hva en ekvivalensrelasjon er.

Ekvivalensklasser. *La R være en ekvivalensrelasjon på mengden A. For hver $a \in A$ lar vi*

$$[a]_R = \{x \mid xRa\}$$

$[a]_R$ kalles R-klassen til a, eller ekvivalensklassen til a modulo R.

Ekvivalensrelasjoner og ekvivalensklasser. *La A være en ikke-tom mengde, og R en ekvivalensrelasjon på A. Da har vi at*

$$[a]_R = [b]_R \iff aRb$$

Bevis.
$\Longrightarrow$

Anta at $[a]_R = [b]_R$. Siden R er refleksiv har vi at aRa, s $a \in [a]_R$. Ved antagelsen har vi da at $a \in [b]_R$, så aRb.

$\Longleftarrow$
At $[a]_R = [b]_R$ er, siden mengder er ekstensjonelt bestemt, ekvivalent med at $[a]_R \subseteq [b]_R$ og $[b]_R \subseteq [a]_R$. Anta at aRb.

$[a]_R \subseteq [b]_R$.

Dersom $x \in [a]_R$, da er $x \in [b]_R$ siden R er transitiv. Dermed er $x \in [b]_R$, så $[a]_R \subseteq [b]_R$.

$[b]_R \subseteq [a]_R$.

Siden R er symmetrisk, følger det fra aRb at bRa. La nå $x \in [b]_R$. Da er xRb, og ved transitivitet av R, xRa, så $x \in [a]_R$, og dermed er $[b]_R \subseteq [a]_R$, som ender beviset.[4] □

[4]Dette beviset er hentet fra kap. 2, §3 i [14], *Set Theory, Logic and their Limitations.*

2.3 Funksjoner

Alle funksjoner er relasjoner som oppfyller funksjonalitetsbetigelsen: dersom f er en n-ær relasjon over A^n slik at dersom $\langle a_1, a_2, \dots a_n \rangle \in f$ og $\langle a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b \rangle \in f$ da er $a_n = b$. Vi skriver da $f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = a_n$. Vi sier at f er en funksjon med domene A^{n-1} og kodomene A og skriver '$f : A^{n-1} \to A$'. En funksjon er altså en regel som til ethvert input, gir ett og bare ett output. La nå h være 'tre delt på x'-funksjonen. Vi skriver '$h(x) = \frac{3}{x}$'. La oss bestemme at $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$.[5] h er altså en funksjon med de naturlige tallene som domene og alle ikke-negative rasjonale tall som kodomene. Hva er så $\frac{3}{0}$, verdien til h i argumentet 0? Det finnes ingen elementer i $\mathbb{Q}^+$ som svarer til dette. Løsningen er å si at h er udefinert for $x = 0$. Funksjoner som har slike unntagelser, som bare er definert på en streng delmengde av domenet sitt, kalles *partielle* funksjoner. Funksjoner som er definert på hele domenet sitt kalles *totale* funksjoner. $h : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}^+$ er altså en total funksjon.

Total. *En funksjon $f : A \to B$ er total dersom*

$$\forall x \in A \, \exists y \in B[f(x) = y].$$

Vi skal nå se på hva termene 'injektiv', 'surjektiv', og 'bijektiv' betyr.

Injektiv. *En funksjon $f : A \to B$ er* injektiv*, eller* en-til-en *dersom to forskjellige elementer i domenet til f alltid gir to forskjellige elementer i kodomenet til f:*

$$\forall x \forall y[x \neq y \to f(x) \neq f(y)]$$

Surjektiv. *$f : A \to B$ er* surjektiv*, eller* på *dersom:*[6]

$$\forall y \exists x[f(x) = y]$$

En funksjon er altså surjektiv dersom ethvert element i kodomenet er funksjonsverdien til minst ett argument fra domenet.

Bijektiv. *f er* bijektiv *dersom den er injektiv og surjektiv. At en funksjon er bijektiv vil altså si at en kan uttømmende pare elementene i A og B med hverandre.*

[5] $\mathbb{Q}^+ = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

[6] Variablene x og y varierer her over to forskjellige mengder. x varierer over domenet til f, A, mens y varierer over kodomenet B. Logikker der slikt er lov kalles på engelsk 'many-sortal logics'. En kan alltid relativisere mangesortale språk til ensortale ved å innføre navn for domenene.

$$\forall y \in B \, \exists x \in A[f(x) = y]$$

er da et vanlig ensortalt uttrykk.

Restriksjon. *Dersom $f : A \to B$, og $C \subseteq A$ da er*

$$f[C] = \{b \in B \mid \exists a \in C \wedge f(a) = b\}$$

$f[C]$ kalles restriksjonen *av f til C, og $f[C] \subseteq B$ for enhver $C \subseteq A$. $f[A]$ kalles verdimengden til f.*

Utvalgsaksiomet. *Utvalgsaksiomet, 'axiom of choice', sier at dersom A er en mengde av ikke-tomme mengder, så finnes det en funksjon f slik at for enhver mengde $B \in A$ så er $f(B) \in B$. f velger altså ut ett element fra hver mengde i A.*

2.4 Uendeligheter - tricks and licks

Vi sier at en mengde har endelig mange elementer dersom vi kan skrive dem som en liste, der listen har et første element og et siste element. Vi sier at mengden er tellbar uendelig dersom vi kan skrive dem som en liste med et første element, men uten et siste element. Mer formelt sier vi at en mengde A er tellbar dersom det finnes en injeksjon $f : A \to \mathbb{N}$, endelig dersom det finnes et tall $n \in \mathbb{N}$ slik at $\forall x \in A[f(x) < n]$, og tellbar uendelig dersom det finnes en bijeksjon $g : A \to \mathbb{N}$. Vi ser da at $\mathbb{N}$ er tellbar uendelige ved den bijektive identitetsfunksjonen $g(x) = x$.

Kardinalitet. *Enhver mengde A assosieres med et tall, kalt* kardinaliteten *til A, og betegnet med '$|A|$', som er antall elementer i A. Kardinaliteten til $\mathbb{N}$, $|\mathbb{N}|$, kalles $\aleph_0$*[7]

La $\mathbb{P}^-$ være mengden av alle hele negative tall, altså

$$\mathbb{P}^- = \{x \mid \exists y[y \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \wedge x = -y]\}$$

$\mathbb{P}^-$ er da tellbart uendelig siden $g : \mathbb{P}^- \to \mathbb{N}$, definert ved $g(n) = -(n+1)$ er en bijeksjon. Mengden av alle hele tall er $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{P}^-$. En skulle kanskje tro at $\mathbb{Z}$ inneholder flere elementer enn $\mathbb{N}$, siden det tross alt er uendelig mange tall i $\mathbb{Z}$ som ikke er i $\mathbb{N}$. Dette er ikke tilfellet, noe en kan se dersom en lister opp alle tallene: $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$ eller ved den bijektive funksjonen

$$h(n) = \begin{cases} 2n & \text{hvis } n \in \mathbb{N} \\ -2n - 1 & \text{hvis } n \in \mathbb{P}^- \end{cases}$$

Det viser seg at dette gjelder generelt. Enhver union av to tellbare uendelige mengder er selv tellbar uendelig. Ja faktisk er unionen av tellbart uendelig mange tellbare uendelige mengder, selv tellbar uendelig. Finnes de da noe som er større en tellbart uendelig? Svaret er ja. De reelle tallene, $\mathbb{R}$,

[7]'א', uttalt alef, er den første bokstaven i det hebraiske alfabetet. $\aleph_0$ betegner det minste uendelige kardinaltallet, kardinaliteten til $\mathbb{N}$. Bruken av hebraiske bokstaver går tilbake til Cantor, mengdelærens far.

er *utellbare*. Det var Cantor som først beviste dette ved å finne opp diagonalbevismetoden. Vi skal bevise at vi ikke kan telle alle de reelle tallene mellom 0 og 1, $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ en gang. Beviset er som følger: Anta for kontradiksjon at en kan telle de reelle tallene. Da kan en skrive dem opp på en liste. For å se det bedre for seg, så kan en tenke seg at denne listen er skrevet ovenfra og ned - den har et første element helt øverst, men har ingen siste element. Dersom et tall har kun endelig mange desimaler, fyller vi ut med uendelig mange nuller[8]. Listen kan ser slikt ut:

1. $.94823487624509872345987245234089712405987140359870\overline{0}$
2. $.8912435987234509871243590004\overline{4}$
3. $.14159265358979323846264338327950284197169399375 10\ldots$
4. $.57\overline{7}$
5. $.1123581321\ldots$
6. $\vdots$

Vi har altså antatt at vi har skrevet opp *alle* tallene på denne listen. Vi skal nå finne et tall som ikke kan være skrevet opp på listen. Trikset er som følger: Vi tar diagonalen av alle tallene på listen, og forandrer litt på dette tallet. Vi lar 0 bli 1, 1 bli 2, ..., og 9 bli 0. Det første tallet til den modifiserte diagonalen er dermed forskjellig fra det første tallet på listen, det andre tallet til den modifiserte diagonalen er forskjellig fra det andre tallet, osv. I eksempel-listen over blir altså de fem første desimaltallene til den modifiserte diagonalen 00286. Dermed har vi vist at den modifiserte diagonalen er forskjellig fra alle tallene på listen - dens n-te element er forskjellig fra det n-te tallets n-te desimal. Men vi antok jo at alle tallene var listet opp. Dermed ser vi at antagelsen om at de reelle tallene kan telles leder oss til en kontradiksjon, og vi har dermed bevist at de reelle tallene er utellbare.

La oss nå bevise at mengden av alle delmengder av en mengde A, $\mathcal{P}(A)$, alltid har større kardinalitet en A. I symboler skriver vi $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Vi må bli enige om noen små ting først.

Kardinalitetulikheter. $|A| \leq |B| \Leftrightarrow_{def} \exists$ *injeksjon* $f : A \to B$.

Generelt, dersom det finnes en injeksjon $f : A \to B$, så finnes det en surjeksjon $g : B \to A$. Formelt kan vi lage g fra f slik:

$$g(b) = \begin{cases} a & \text{hvis } b = f(a) \quad \forall b \in f[A] \\ c & \text{hvis } b \in B - f[A] \quad \text{der } c \text{ er et tilfeldig element i } A \end{cases}$$

[8] Det er vanlig praksis skrive '$234\overline{1234}$' dersom sekvensen '1234' gjentar seg uendelig mange ganger. Vi har altså at $3.14159\overline{9} = 3.14159999\ldots$.

Kardinalitet til potensmengder. *La* $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$*. Da er* $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Bevis. Anta for kontradiksjon at $|\mathcal{P}(A)| \leq |A|$. Da finnes det en injeksjon $f : \mathcal{P}(A) \to A$. Ved bemerkningen over finnes det da en surjeksjon

$$s : A \to \mathcal{P}(A)$$

s er altså en funksjon som tar argumenter i A og gir delmengder av A som verdier. La nå

$$M = \{x \mid x \notin s(x)\}$$

Da er $M \subseteq A$ og $M \in \mathcal{P}(A)$. M opptrer her som en diagonal. Siden s er en surjeksjon finnes det en $m \in A$ slik at $s(m) = M$. Dermed har vi at

$$\begin{array}{ll} m \in M & \\ \iff & \text{ved def. av } M \\ m \notin s(m) & \\ \iff & \text{siden } s(m) = M \\ m \notin M & \end{array}$$

som åpenbart er en kontradiksjon. Dermed finnes det ingen slik surjeksjon $s : A \to \mathcal{P}(A)$. Ved modus tollens finnes det da heller ingen injeksjon $f : \mathcal{P}(A) \to A$. Dermed følger det fra definisjonen av kardinalitetsforskjeller at $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.[9] $\square$

Hvilket kardinaltall er så kardinaliteten til $\mathbb{R}$? Vi har følgende liste av kardinaltall:

$$0, 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots, \aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots$$

Kontinuumshypotesen sier at $|\mathbb{R}| = \aleph_1$. Og den generelle kontinuumshypotesen sier at $|A| = \aleph_n \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = \aleph_{n+1}$. Ingen av disse påstandene kan bevises eller motbevises fra aksiomene til mengdelære (Gödel vise det første i 1938, og Cohen viste det siste i 1963). Vi sier at kontinuumshypotesen er uavhengig av mengdelære. Det samme gjelder utvalgsaksiomet, også bevist uavhengig av Gödel og Cohen.

'ω' over er navnet på det første transfinite, eller uendelige *ordinaltallet*. Kort fortalt er dette tall sett på som ordningstall. Utsagnet 'de siste skal bli de første' forutsetter at vi kan stille folk opp på en rekke, eller i en sekvens som har et første element, et andre element, osv. Ordinaltall beskriver altså elementenes plass i en sekvens, evt. er navn på elementenes plass. Vi skal komme tilbake til dette siden.

Siden primtall er en essensiell bit av gödeltall, og er det vi skal bruke til å motivere strukturalisme, fortsetter vi ferden med to pene setninger om primtall.

[9] Dette beviset er tatt Lars Kristiansens forelesninsnotater.

3 Primtall

Vi skal i dette avsnittet vise at det finnes uendelig mange primtall, og at ethvert naturlig tall strengt større enn 1 har en unik primtallsfaktorisering.

La oss bli enige om hva et primtall er før vi går i gang. Et primtall er et naturlig tall som bare er delelig på seg selv og 1. For at primtallsteoremene skal bli penere, så regner vi ikke 1 som et primtall. Tallene $2, 3, 5, 7, 11, 13$ er altså de seks første primtallene.

Aritmetikkens fundamentalteorem. *Alle naturlige tall $a \geq 2$ kan primtallfaktoriseres på en unik måte når en ser bort fra rekkefølgen.*

Bevis. Siden teoremet har to deler - en eksistensdel, og en unikhetsdel, deler vi beviset opp i to deler.

Eksistens: Anta at ikke alle tall kan primtallsfaktoriseres. Da finnes det et minste tall b som ikke er et produkt av primtall. Siden b ikke selv kan være et primtall, må det finnes tall $c, d < b$ slik at $b = cd$; å ikke være et primtall er jo å være delelig, uten rest, med minst ett tall forskjellig fra seg selv, og dermed mindre enn seg selv. Siden b er det minste tallet som ikke kan primtallsfaktoriseres, må $c = p_1 p_2 \dots p_k$ og $d = q_1 q_2 \dots q_l$ for primtall p_i og q_j. Men dermed kan jo b primtallsfaktoriseres allikevel: $b = p_1 p_2 \dots p_k q_1 q_2 \dots q_l$. Det kan altså ikke finnes et slikt minste tall b, og dermed kan alle tall primtallsfaktoriseres.

Unikhet: Anta igjen at det finnes et minste tall, men denne gangen skal dette minste tallet a ha to primtallsfaktoriseringer.

$$a = p_1 p_2 \dots p_k = q_1 q_2 \dots q_l$$

Siden a er delelig med p_1 uten rest, må $q_1 q_2 \dots q_l$ være delelig med p_1 uten rest. Siden q_i er primtall, vil dette si at $p_1 = q_j$ for et tall $1 \leq j \leq l$. Men dermed er

$$\frac{a}{p_1} = b = p_2 p_3 \dots p_k = q_1 q_2 \dots q_{j-1} q_{j+1} \dots q_l$$

b er strengt mindre enn a, og b har to primtallsfaktoriseringer. Dette motsier antagelsen om at a var det minste tallet med minst to primtallsfaktoriseringer, og dermed finnes det ikke et slikt minste tall a, og dermed finnes det heller ingen tall med mer enn en primtallsfaktorisering.[10]

□

Uendelig mange primtall. *Det finnes uendelig mange primtall.*

[10] Dette beviset er fra kap. 2 i [1] *Klassisk Tallteori* av Erik Alfsen og Tom Lindstrøm, som er pensum i faget *Tall, rom og linearitet* ved UiO.

Bevis. Vi antar at det bare finnes endelig mange primtall og utleder en kontradiksjon som dermed viser oss at det finnes uendelig mange primtall.

Siden det bare finnes endelig mange primtall så kan vi lage en liste med et første element og et siste element. La oss anta at det finnes k primtall. Listen blir dermed

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$$

.

La oss nå betraktet tallet $m = p_1 p_2 p_3 \cdots p_k$, altså produktet av alle primtallene. m er åpenbart et naturlig tall, og dermed er $m + 1$ også et naturlig tall.[11] Hvis vi nå prøver å dele n med et av primtallene, f.eks. p_1, få vi en rest på en.

$$\frac{p_1 p_2 p_3 \cdots p_k + 1}{p_1} = \frac{p_1 p_2 p_3 \cdots p_k}{p_1} + \frac{1}{p_1} = p_2 p_3 \cdots p_k + \frac{1}{p_1}$$

Regnestykket blir åpenbart tilsvarende hvis vi heller prøver å dele med de andre primtallene. Dermed har vi vist at det finnes et tall $m > 1$ som ikke er delelig med noen primtall. Siden vi vet at alle tall strengt større enn 1 kan unikt skrives som et produkt av primtall, og dermed er delelig med minst et primtall, har vi funnet vår kontradiksjon. Dermed finnes det uendelig mange primtall.[12] □

Oppgave: Anta at du kvantifiserer over de naturlige tallene. Finn en første ordens formel '$Primtall(x)$' som sier at x er et primtall. Finn s formler som uttrykker teoremene over. Vi skal senere se at en i første ordens logikk ikke kan si at det finnes uendelig mange ting, så en må finne en formel som er sann kun *dersom* det finnes uendelig mange ting.

4 Rekursjon og induksjon

Induksjon er en bevisteknikk som vi skal bli bedre kjent med i dette avsnittet. Induksjon kan utføres på mengder som er rekursivt definert. Hva vil det så si at noe er rekursivt definert? I praksis vil dette si at vi bestemmer at noen elementer, de primitive, er med i mengden, og bestemmer så reglene/funksjonene/operatorene som mengden skal være lukket under. Mengden $\mathbb{N}$ er f.eks. den minste mengden som inneholder tallet 0 og som er lukket under suksessorfunksjonen '$x+1$'. Et annet eksempel på en rekursivt definert mengde er mengden av alle utsagnslogiske formler. Denne mengden er den minste mengden som inneholder alle atomære formler, P, og hvis A

[11] Vi sier at de naturlige tallene er *lukket under* operasjonene 'pluss' og 'gange'. Mer generelt: en mengde A er lukket under en funksjon eller operasjon dersom funksjonen applisert på et element i A alltid gir et nytt element i A - f.eks. er $3^2 = 9$. Hvis en kan vise at dette gjelder for alle tall og ikke bare 3, så har en bevist at $\mathbb{N}$ lukket under 'opphøyd i andre'-funksjonen.

[12] Dette beviset er fra Tillegg A i [15] *Reelle tall* av Ivan Niven.

og B er med i mengden, da er også $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ og $(A \leftrightarrow B)$ også med i mengden. Vi ser her hvordan en mer kompleks formel, f.eks. $(A \rightarrow B)$, er komponert av mindre komplekse formler ved hjelp av en regel.

Induksjon kommer i to varianter, såkalt svak og sterk induksjon. Vi skal presentere disse, samt induksjon slik grekerne kjente til det, nemlig *Prinsippet om det minste tallet*, for så å vise at disse tre er ekvivalente.

Induksjon er et viktig bevisverktøy i matematikk generelt. I logikk bruker vi ofte det som kalles kompleksitetsinduksjon. Hvis vi har en mengde som er definert rekursivt, da kan vi bruke kompleksitetsinduksjon dersom vi ønsker å vise at alle elementene i mengden har en eller annen egenskap.

Et eksempel på kompleksitetsinduksjon: Vis at alle utsagnslogiske formler har like mange høyre- som venstreparenteser.

Bevis. Basistilfellet:

Alle atomære formler inneholder ingen parenteser, så dermed er påstanden trivielt sann for basistilfellet.

Induksjonhypotese:

Anta at A har n høyre- og venstreparenteser, og B har m høyre- og venstreparenteser

Vi må vise at de mer komplekse formlene $(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B)$ og $(A \leftrightarrow B)$ har like mange høyre- som venstreparenteser.

Siden A har n høyre- og venstreparenteser, har $(\neg A)$ $n+1$ høyre- og venstreparenteser, så påstanden stemmer så langt.

Siden A har n høyre- og venstreparenteser, og B har m høyre- og venstreparenteser, har $(A \circ B)$ $n+m+1$ høyre og venstreparenteser, for

$$\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

$\square$

Vi skal nå se på vanlig matematisk induksjon. La P være en egenskap. Vi skriver 'Pi' som forkortelse for utsagnet 'i har egenskapen P'.

Svak induksjon.

$$\big[P0 \wedge \forall n[Pn \Rightarrow P(n+1)]\big] \Longrightarrow \forall n Pn$$

Et svakt induksjonsbevis har dermed to steg. Først må en vise at $P0$ holder (basistilfellet). Deretter antar en at Pn holder for et *tilfeldig* tall n (induksjonshypotese), og viser så at dette medfører at $P(n+1)$ holder.

Eksempel: Vis at

$$0 + 1 + 2 + 3 \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bevis. Basistilfellet: $n = 0$.

$$0 = \frac{0(0+1)}{2} = 0$$

Induksjonshypotese: Anta at

$$0 + 1 + 2 + 3 \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Vi må vise at

$$0 + 1 + 2 + 3 \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Av følgende utregning ser vi at dette stemmer:

$$\begin{aligned} 0 + 1 + 2 + 3 \cdots + n + (n+1) &= \tfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \tfrac{n(n+1)}{2} + \tfrac{2(n+1)}{2} \\ &= (n+1)\left[\tfrac{(n+2)}{2}\right] \\ &= \tfrac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

$\square$

Sterk induksjon.

$$\forall n[\forall m(m < n \Rightarrow Pm) \Rightarrow Pn] \Longrightarrow \forall n Pn$$

Hvis en altså skal bruke sterk induksjon, må en vise at dersom n er et tilfeldige tall slik at Pm holder for alle tall $m < n$, da holder Pn også. Induksjonshypotesen er her mao. $\forall m(m < n \Rightarrow Pm)$. Merk også at sterk induksjon ikke krever at vi viser at basistilfellet holder slik svak induksjon krever ($P0$), siden $\forall m(m < 0 \Rightarrow Pm)$ holder trivielt.

Svak induksjon $\Rightarrow$ Sterk induksjon.

Bevis. Anta at P er en egenskap slik at

1. $\forall n[\forall m(m < n \Rightarrow Pm) \Rightarrow Pn]$

holder. Vi må, ved bruk av svak induksjon, vise at

2. $\forall n Pn$

også holder. Vi trenger en definisjon:

3. $Qn \Longleftrightarrow_{def} \forall m(m < n \Rightarrow Pm)$

1. kan nå skrives som

4. $\forall n[Qn \Rightarrow Pn]$

Basistilfellet: $Q0$. $Q0 \Longleftrightarrow_{def} \forall m(m < 0 \Rightarrow Pm)$, som er trivielt sant.

Induksjonshypotese: Qn.

Vi skal altså vise at $Q(n+1)$ holder. Siden Qn holder, slutter vi fra 1. at Pn også holder. Dermed vet vi at $\forall m(m \leq n \Rightarrow Pm)$ holder. Siden $m \leq n \iff m < n+1$, har vi dermed vist $Q(n+1)$. Ved prinsippet om svak induksjon kan vi dermed slutte $\forall nQn$, som ved definisjon er ekvivalent med $\forall n[\forall m(m < n \Rightarrow Pm)]$. Dermed kan vi, via 1., slutte Pn for alle n, altså $\forall nPn$, som var det vi skulle bevise. $\square$

La $M \subseteq \mathbb{N}$. Dersom a er det minste tallet i M, har vi at $a \leq m$ for alle $m \in M$. Det er åpenbart at dersom M har et minste element, da finnes det et unikt minste element.

Prinsippet om det minste tallet (PMT). *Dersom $M \subseteq \mathbb{N}$, og $M \neq \emptyset$, da har M et minste element.*

For å bevise neste teorem, trenger vi følgende fakta om de naturlige tallene:

Trikotomi. *For alle naturlige tall m og n gjelder:*

$$m < n \ \vee \ m = n \ \vee \ n < m$$

Sterk induksjon $\Rightarrow PMT$.

Bevis. PMT er ekvivalent med

$$M \subseteq \mathbb{N} \wedge \neg\exists_{minste} m \in M \Longrightarrow M = \emptyset$$

Vi antar da at $M \subseteq \mathbb{N}$ ikke har et minste element. La P være egenskapen å ikke være medlem av M, altså

$$P = \{n \mid n \notin M\}$$

Å vise at $M = \emptyset$ er dermed ekvivalent med å vise at $\forall nPn$ holder. Vi skal vise dette ved å bruke sterk induksjon på P.

La n være et tall, og anta som induksjonshypotese at $\forall m(m < n \Rightarrow Pm)$ holder. Vi må i første omgang vise at Pn holder. Vi har følgende ekvivalenser:

$$\begin{array}{rcll} \forall m(m < n \Rightarrow Pm) & \iff & \forall m(\neg m < n \vee Pm) & \\ & \iff & \forall m(\neg m < n \vee m \notin M) & \text{Def. av } M \\ & \iff & \forall m(\neg[m < n \wedge m \in M]) & \text{De Morgans lov} \\ & \iff & \neg\exists m(m < n \wedge m \in M) & \text{De Morgans lov} \end{array}$$

Anta nå at $n \in M$. Siden siste setning sier at det ikke finnes noen tall mindre enn n som er med i M, så må n være det minste tallet i M, men vi har antatt at M ikke har et minste element, så $n \notin M$, og dermed Pn, som var det vi i første omgang skulle vise. Fra prinsippet om sterk induksjon følger det da at $\forall n Pn$ holder, som er ekvivalent med at $M = \emptyset$ som var det vi skulle vise. □

PMT ⇒ Svak induksjon.

Bevis. La P være en egenskap slik at $P0 \wedge \forall n[Pn \Rightarrow P(n+1)]$ holder. Vi må vise, ved å bruke PMT, at $\forall n Pn$ holder. Dette er ekvivalent med å vise at

$$M =_{def} \{n \mid \neg Pn\} = \emptyset$$

Ved PMT er det tilstrekkelig å vise at M ikke har et minste element.

Anta for kontradiksjon at $m \in M$ er et slikt minste element. Siden $P0$ holder er $m \neq 0$. La n være tallet slik at $n + 1 = m$. Dermed er $n < m$. Siden m er det minste elementet i M, må Pn holde. Fra antagelsen $\forall n[Pn \Rightarrow P(n+1)]$ slutter vi nå at $P(n+1)$ også holder. Siden $m = n+1$, følger det at Pm også holder, men da kan ikke m være et element i M, og *a fortiori* heller ikke det minste elementet i M. Vi er dermed ledet til en kontradiksjon, og slutter at $M = \emptyset$. □

Vi har dermed vist at de tre prinsippene PMT, Svak induksjon og Sterk induksjon er ekvivalente.[13]

5 Syntaks

Vi skal i det følgende gå kjapt i gjennom hva logikere mener med språk, formler og setninger. Et språk er en mengde av symboler og noen regler for hvordan en kan sette sammen disse symbolene. Disse symbolene er enten logiske eller ikke-logiske symboler. De logiske symbolene er felles for alle logiske språk, mens de ikke-logiske symbolene varierer. Litt mer konkret:

Språk. *Et logisk språk $\mathcal{L}$ er en uendelig mengde av distinkte symboler fra følgende kategorier*[14]*:*

[13] Beviset for at disse tre prinsippene er ekvivalente er tatt fra kap. 0 i [14] *Set theory, logic and their limitations* av Moshé Machover.

[14] Jeg prøver, etter fattig evne, å være noenlunde korrekt hva angår hermetegn, men lar av og til, som i definisjonen under, leseligheten trumfe korrekthet (hva n enn det er mht. hermetegn!). Matematiske symboler, formler ol. er som regel, etter matematisk skikk, satt i kursiv. Hvis denne regelen brytes er det for å skille en formel fra mengden av objekter formelen er sann om. '$Primtall(x)$' er altså en formel, mens Primtall er mengden av alle primtall. Kursiv, i en matematisk kontekst, skal altså ikke forstås som et metalingvistisk verktøy ekvivalent med hermetegn. Kursiv er ellers stort sett brukt for å understreke.

Dersom ϕ er en faktisk formel, la oss si '$\forall x(x = x)$' bruker vi 'ϕ' som navnet på formelen,

1. *Parenteser:* (,).

2. *Konnektiver:* $\vee$, $\neg$.

3. *Kvantor:* $\forall$.[15]

4. *Variabler:* $v_1, v_2, v_3 \ldots$. *Mengden av alle variabler døpes herved* Vars.

5. *Identitetstegn:* $=$.

6. *Konstantsymboler: En mengde av* 0 *eller flere konstantsymboler:* $c_1, c_2, c_3, \ldots$.

7. *Funksjonssymboler: For hver* $n \in \mathbb{N}$ *en mengde av* 0 *eller flere* n*-ære funksjonssymboler.*

8. *Relasjonssymboler: For hver* $n \in \mathbb{N}$ *en mengde av* 0 *eller flere* n*-ære relasjonssymboler.*

De første fem kategoriene regnes som logiske symboler og er dermed med i ethvert språk, mens de tre siste - de ikke-logiske symbolene, bestemmer *signaturen*. For å bestemme et språk trenger en altså bare beskrive signaturen. Hvis en ønsker å snakke om Per, Kari og den binære relasjon 'ser' mellom dem kan en f.eks. bruke signaturen {Per, Kari, ser}. Vi skal jobbe en del med tallteori. Språket for tallteori, $\mathcal{L}_{NT}$, er $\{0, S, +, \times, E, <\}$ som intuitivt skal være tegn for tallet null,[16] suksessorfunksjonen, 'pluss',

og hermetegn for å referere til formelen selv nå formelen selv er mellom hermetegnene (mellom ' ' ', og ' ' '). Vi trenger også en måte å referere til en *tilfeldig* formel. Vi sier ting som 'formelen '$P(x) \vee Q(x)$' inneholder tegnet '$\vee$' ', men vi ønsker også å kunne si slike ting som 'la ϕ være en vilkårlig formel som inneholder tegnet '$\vee$' '. 'ϕ' er da *navnet* til en tilfeldig formel som oppfyller betingelsen, eller mer korrekt, 'ϕ' er en metavariabel som tar navn på formler slik som ' '$P(x) \vee Q(x)$' ' som argument.

Dersom 'ϕ' og 'ψ' er to slike navn, hva betyr da ' '$\phi \to \psi$' er en tautologi'? Setningen inneholder kun navnet på den generelle formelen '$\phi \to \psi$', men vi ønsker å si at enhver formel ϕ og ψ som oppfyller noen betingelser, så er resultatet av å bytte ϕ for 'ϕ' og ψ for 'ψ' i '$\phi \to \psi$' en tautologi. Quine, i [20] §6, innfører det han kaller 'quasi-quotation'. I stedet for ' '$\phi \to \psi$' er en tautologi', som er falskt i følge Quine, skriver han '$\ulcorner \phi \to \psi \urcorner$ er en tautologi'. Hvis vi lar en instans av ϕ være '$2 \leq 3$', og ψ være '$4 \leq 5$', da har vi altså at $\ulcorner \phi \to \psi \urcorner$ er '$2 \leq 3 \to 4 \leq 5$'.

Quine om sitt. Vi skal bruke uttrykket '$\ulcorner \phi \to \psi \urcorner$' som gödeltallet til formelen '$\phi \to \psi$', $\ulcorner \phi \to \psi \urcorner$ er altså gödeltallet til formelen '$\phi \to \psi$'. Vi håper at det ikke blir *flere* forvirringer ved å unnlate å bruke 'quasi-quotes', og valser derfor framover og bruker ϕ, ψ, etc. som tilfeldige formler, og ikke (iallfall sjeldnere) navn på tilfeldige formler. La oss derfor obskurantisk overse leksa om viktigheten av å alltid skille 'use' og 'mention'.

[15] Hvis jeg noen ganger bruker '$\exists$', '$\wedge$', '$\to$', eller '$\leftrightarrow$', så er disse å forstå som forkortelser. De er ikke med i vårt logiske språk.

[16] Tegnet for et tall kalles *numeralet* til tallet. Hva numeralet betegner er kontekstavhengig. Numeralet '10' kan f.eks. betegne tallet 10 eller 2 alt ettersom en bruker det som et desimal numeral eller et binær numeral. Dette entydiggjøres av og til ved subskript: $10_{10} = 10$, mens $10_2 = 2$, der konvensjonen tilsier at subskriptnumeralene altså er desimale.

'gange', 'opphøyd i' og 'strengt større enn'. Signaturer har ingen begrensninger hva angår størrelse - en kan godt ha utellbart mange konstanter, $\aleph_\omega$ mange relasjoner osv., men som regel klarer vi oss med tellbare signaturer (første ordens *språk* er derimot per definisjon minst tellbart uendelig pga. variablene).

Vi har nå presentert symbolene. Hva så med reglene for å sette sammen symbolene? Vi møter nå vår første *rekursive* definisjon. Hold dere fast!

Term. *En* term *i språket $\mathcal{L}$ er en ikke-tom og endelig streng t av symboler fra $\mathcal{L}$ slik at enten:*

1. *t er en variabel, eller*
2. *t er et konstantsymbol, eller*
3. *$t \equiv ft_1t_2 \dots t_n$, der f er et n-ært funksjonssymbol, og t_i er termer.*

Noen ord om min symbolbruk: Jeg bruker '$\rightarrow$' og '$\leftrightarrow$' i formler - altså i objektspråket, mens '$\Rightarrow$' og '$\Leftrightarrow$' i metaspråket - språket vi bruker til å snakke om formler ol. i objektspråket. Videre bruker jeg '$\equiv$' som i '$t \equiv ft_1t_2 \dots f_n$' for å si at en tilfeldig term t (senere også formel) har syntaktiske form '$ft_1t_2 \dots f_n$'. t fungerer altså som en syntaktisk metavariabel.

Formel. *En* $\mathcal{L}$-formel *er en ikke-tom og endelig streng ϕ av symboler fra $\mathcal{L}$ slik at enten:*

1. *$\phi \equiv = t_1t_2$ der t_1 og t_2 er termer fra $\mathcal{L}$, eller*
2. *$\phi \equiv Rt_1t_2 \dots t_n$ der R er et n-ært relasjonssymbol fra $\mathcal{L}$ og t_i er termer, eller*
3. *$\phi \equiv (\neg\alpha)$, der α er en $\mathcal{L}$-formel, eller*
4. *$\phi \equiv (\alpha \vee \beta)$, der α og β er $\mathcal{L}$-formler, eller*
5. *$\phi \equiv (\forall v)(\alpha)$, der α er en $\mathcal{L}$-formel og v er en variabel.*

Vi krever altså at alle formlene har endelige lengde.[17] Vi dropper ofte å skrive parenteser når dette ikke fordres av leseligheten. Noen eksempler på

[17]Formler som

$$\bigwedge_{i<\infty} Pi \equiv P1 \wedge P2 \wedge \dots \wedge Pn \wedge \dots$$

er mao. ikke tillatt. Det finnes logikker der slikt er lov, de kalles på engelsk 'infinitary logic'.

Det er også verdt å merke seg at vi i ensortale språk kun kan kvantifisere over en type objekter, men at disse objektene kan være hva som helst, tall, røde hunder, mengder, funksjoner osv. Forskjellen på første og andre ordens logikk er ikke at første ordens logikk bare kan kvantifisere over objekter, mens andre ordens logikk i tillegg kan kvantifisere over relasjoner/funksjoner/mengder. Forskjellen er heller at andre ordens logikk kan kvantifisere over mengder av hva enn de første ordens kvantorene kvantifiserer over. Dersom '$\forall x$' betyr 'for alle røde hunder' i en kontekst, da vil andre ordens kvantoren '$\forall X$' bety 'for alle delmengder av røde hunder'. Mer om andre ordens logikk siden.

formler fra $\mathcal{L}_{NT}$:

$$\neg\forall y\neg(x = y \times y)$$

$$S(0) < x \wedge \forall y_1 \forall y_2 (x \neq SS(y_1) \times SS(y_2))$$

Disse formlene "sier" henholdsvis at x er et partall, og at x er et primtall, og kan brukes som forkortelser for formlene '$Partall(x)$' og '$Primtall(x)$'. Hvorfor er det korrekt å bruke ' "sier" ' ('scare-quotes') og ikke 'sier'? Grunnen er at så langt har vi bare vist hvordan symboler kan settes sammen til noe vi kaller termer og formler. Vi har ennå ikke sagt noe om hva disse skal betegne og bety. Vi nærmer oss det som kalles modellteori - matematikkens semantikk.

6 Semantikk

Modellteori er en egen gren av matematisk logikk og er det vi trenger for å si hva det vil si at en formel er oppfyllbar og hva det vil si at noe følger fra noe annet - altså hva sannhet og logisk konsekvens er for første ordens logikk. Det er verdt å legge merke til at modellteori er blottet for modale kvalifiseringer. Det finnes definisjoner av logiske konsekvens, og semantikk for første ordens logikk generelt, som gjør bruk av modale termer, en hører ofte at et argument er gyldig dersom gitt at premissene er sanne så er konklusjonen *nødvendigvis* sann el., men Tarskis modell-teori er altså rent ekstensjonell. Nok dill. Kom til saken!

En modell, eller struktur, er definert som en ordnet n-tuppel. Vi betegner modeller med store gotiske bokstaver '$\mathfrak{A}$', '$\mathfrak{B}$', '$\mathfrak{C}$', ... En struktur $\mathfrak{A}$ er en modell for språket $\mathcal{L}$ dersom A, universet/domenet til $\mathfrak{A}$, er ikke-tomt, og,

1. For hver konstant $c \in \mathcal{L}$, $c^{\mathfrak{A}} \in A$.[18]

2. For hvert n-ært funksjonssymbol $f \in \mathcal{L}$, en total funksjon $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$

3. For hvert n-ært relasjonssymbol $R \in \mathcal{L}$, en n-ær relasjon $R^{\mathfrak{A}}$, altså $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$

'$\mathfrak{A}$' er altså en tolkningsfunksjon. F.eks. er standardmodellen til tallteori uttrykket i språket $\mathcal{L}_{NT}$, $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, 0^{\mathfrak{N}}, S^{\mathfrak{N}}, +^{\mathfrak{N}}, \times^{\mathfrak{N}}, E^{\mathfrak{N}}, <^{\mathfrak{N}} \rangle$.[19]

Før vi kommer til Tarsis rekursive mesterverk må vi si litt på det som kalles tilordningsfunksjoner. Vi så i forrige avsnitt at alle logiske første ordens språk har tellbart uendelig mange variabler. Mengden av alle slike variabler

[18]'c', altså tegnet, er et konstant-symbol, eller et objekt-språk-navn, mens '$c^{\mathfrak{A}}$' er meta-språk-navnet på objektet $c^{\mathfrak{A}}$. Likeens for funksjoner og relasjoner.

[19]Hva er galt med å si at en modell er en n-tuppel? Hva skjer dersom vi har utellbart mange navn, funksjoner eller relasjoner? En kunne kanskje si at en modell er en kvadruppel der hvert element er en mengde. Siden vi stort sett kun kommer til å se på tellbare språk, så holder vi oss til standarddefinisjonen som ser litt penere ut.

døpte vi *Vars*. Vi sier at en funksjon $s : \mathit{Vars} \to A$ er en tilordningsfunksjon for $\mathfrak{A}$. s tilordner altså hver variabel et element i A. Vi kan modifisere en tilordningsfunksjon. $s[x|a]$ er x-modifikasjonen av s. $s[x|a]$ er helt lik s bortsett fra at $s[x|a]$ garanterer at variabelen x blir tilordnet elementet $a \in A$. $s[x|a]$ fungerer slik:

$$s[x|a](v) = \begin{cases} s(v) & \text{hvis} \quad v \neq x \\ a & \text{hvis} \quad v = x \end{cases}$$

Vi definerer term-tilordningsfunksjonen $\overline{s}$ generert fra s slik:

1. Hvis t er en variabel, $\overline{s}(t) = s(t)$
2. Hvis t er et konstantsymbol c, $\overline{s}(t) = c^{\mathfrak{A}}$
3. Hvis $t \equiv ft_1t_2 \ldots t_n$, $\overline{s}(t) = f^{\mathfrak{A}}(\overline{s}(t_1), \overline{s}(t_2), \ldots, \overline{s}(t_n))$

Term-tilordningsfunksjoner tar altså termer som input, og gir oss elementer i domenet som verdier.

Hvis $\mathfrak{A}$ er en modell for $\mathcal{L}$, en $\mathcal{L}$-modell, og ϕ er en $\mathcal{L}$-formel, og $s : \mathit{Vars} \to A$ er en tilordningsfunksjon, sier vi at $\mathfrak{A}$ oppfyller ϕ *under* s og skriver $\mathfrak{A} \models \phi[s]$ dersom

1. $\phi \equiv \ = t_1t_2$, og $\overline{s}(t_1) = \overline{s}(t_2)$.
2. $\phi \equiv \ Rt_1t_2 \ldots t_n$, og $\langle \overline{s}(t_1) = \overline{s}(t_2) \ldots \overline{s}(t_n) \rangle \in R^{\mathfrak{A}}$.
3. $\phi \equiv \ (\neg\alpha)$, og $\mathfrak{A} \not\models \alpha[s]$.
4. $\phi \equiv \ (\alpha \vee \beta)$, og $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$ eller $\mathfrak{A} \models \beta[s]$.
5. $\phi \equiv \ (\forall x)(\alpha)$, og $\mathfrak{A} \models \alpha[s[x|a]]$ for alle $a \in A$.

Merk her at formlene på venstre side hører til objektspråket, mens høyre side er utsagn i metaspråket - f.eks. er tegnet '=' brukt i to kontekster i punkt 1), først som et rent syntaktisk tegn, og deretter som navn på identitetsrelasjonen. Spesielt er '$\models$' en del av metaspråket.

Hvis s er en tilordningsfunksjon slik at $\mathfrak{A} \models \phi[s]$, sier vi at $\mathfrak{A}$ oppfyller ϕ *under* s. Vi sier at $\mathfrak{A}$ oppfyller/er en modell for ϕ, og skriver $\mathfrak{A} \models \phi$ dersom $\mathfrak{A} \models \phi[s]$ **for alle** $s : \mathit{Vars} \to A$. Dersom Γ er en mengde $\mathcal{L}$-formler så sier vi at $\mathfrak{A}$ oppfyller Γ og skriver $\mathfrak{A} \models \Gamma$ dersom for alle $\gamma \in \Gamma$, $\mathfrak{A} \models \gamma$.

Legg merke til forskjellen på å oppfylle *simpliciter* og oppfylle *under* en tilordningsfunksjon. Vi er stort sett interesserte i det første. Merk også at vi bruker 'modell for' i to betydninger - modell for et språk og modell for en formler.

Logisk konsekvens. *Dersom* Δ *og* Γ *er mengder av* $\mathcal{L}$*-formler sier vi at* Δ logisk impliserer Γ*, eller* Γ *er en* logisk konsekvens *av* Δ*, og skriver* $\Delta \models \Gamma$*, dersom for hver* $\mathcal{L}$*-modell* $\mathfrak{A}$ *og enhver formel* $\phi \in \Gamma$*,*

$$\mathfrak{A} \models \Delta \Longrightarrow \mathfrak{A} \models \phi.$$

Vi sier at en formel ϕ er gyldig dersom den er en logisk konsekvens av den tomme mengden. I så tilfelle skriver vi kun $\models \phi$, i stedet for $\emptyset \models \phi$. Hvis vi tillater å kvasi-formalisere metaspråket vårt, ser vi at '$\Gamma \models \phi$' kan utbroderes slik:

$$\begin{gathered} \Gamma \models \phi \\ \Longleftrightarrow \\ \forall \mathfrak{A}\,[\mathfrak{A} \models \Gamma \Longrightarrow \mathfrak{A} \models \phi] \\ \Longleftrightarrow \\ \forall \mathfrak{A}\big[\forall s_1\,(\mathfrak{A} \models \Gamma[s_1]) \Longrightarrow \forall s_2\,(\mathfrak{A} \models \phi[s_2])\,\big] \end{gathered}$$

6.1 Ekvivalens

Vi viser nå at en kan definere ekvivalens på to ikke-ekvivalente måter. Beviset er en syntaktisk fest og gjør bruk av metaspråk-kvasi-formaliseringen over. Det anbefales å holde tungen bent i munnen, men ikke å hold pusten!

Sterk ekvivalens

$$[\phi \Leftrightarrow \psi] \quad \Longleftrightarrow_{def} \ \models \phi \to \psi \text{ og } \models \psi \to \phi$$

Svak ekvivalens

$$[\phi \Leftrightarrow \psi] \quad \Longleftrightarrow_{def} \quad \phi \models \psi \text{ og } \psi \models \phi$$

Sterk ekvivalens sier altså at to formler ϕ og ψ er ekvivalente hviss formelen $\phi \leftrightarrow \psi$ er en tautologi, men svak ekvivalens sier at ϕ og ψ er ekvivalente hviss mengden av modeller for ψ er den samme som mengden av modeller for ψ. Vi skal i det følgende vise at disse definisjonene ikke er like. Beviset for dette kommer til å gjøre kraftig bruk av tolkningsfunksjoner.

Vi deler beviset opp i to deler.

Bevis.

Sterk $\Rightarrow$ Svak.

Først viser vi at sterk ekvivalens impliserer svak ekvivalens ved å vise at

$$\models (\phi \to \psi) \;\Rightarrow\; \phi \models \psi$$

Først noen ekvivalenser ved definisjon:

$$\begin{array}{rcl} \models \phi \to \psi & \Rightarrow & \phi \models \psi \\ & \Longleftrightarrow & \\ \forall \mathfrak{A}[\mathfrak{A} \models \varnothing \Rightarrow \mathfrak{A} \models \phi \to \psi] & \Rightarrow & \forall \mathfrak{A}[\mathfrak{A} \models \phi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi] \\ & \Longleftrightarrow & \\ \forall \mathfrak{A}[\forall s_1 \mathfrak{A} \models \neg\phi \vee \psi[s_1]] & \Rightarrow & \forall \mathfrak{A}[\forall s_2 \mathfrak{A} \models \phi[s_2] \Rightarrow \forall s_3 \mathfrak{A} \models \psi[s_3]] \\ & \Longleftrightarrow & \\ \forall \mathfrak{A}[\forall s_1 \mathfrak{A} \not\models \phi[s_1] \text{ eller } \mathfrak{A} \models \psi[s_1]] & \Rightarrow & \forall \mathfrak{A}[\forall s_2 \mathfrak{A} \models \phi[s_2] \Rightarrow \forall s_3 \mathfrak{A} \models \psi[s_3]] \end{array}$$

Nå til saken. Vi skal vise at siste implikasjon over stemmer. Vi deler beviset i to deler:

1. La først $\mathfrak{B}$ være en modell slik at $\forall s : Vars \to B, \mathfrak{B} \not\models \phi[s]$. Da er både antesedenten og konsekventen sann, og følgelig stemmer implikasjonen.
2. La først $\mathfrak{B}$ være en modell slik at $\forall s : Vars \to B, \mathfrak{B} \models \phi[s]$ og $\mathfrak{B} \models \psi[s]$. Da er antesedenten sann, og det burde være lett å se at konsekventen også er sann.

Dette fullfører bevisets første del.

Svak $\not\Rightarrow$ Sterk.

Ved å la $\phi \equiv x < y$ og $\psi \equiv z < w$ viser vi at følgende implikasjon ikke holder:

$$\phi \models \psi \;\; \Rightarrow \;\; \models (\phi \to \psi)$$

Først litt syntaktisk utbrodering:

$$\begin{aligned}
\phi \models \psi \quad & \Leftrightarrow \quad \forall \mathfrak{A} \, [(\mathfrak{A} \models \phi) \Rightarrow (\mathfrak{A} \models \psi)] \\
& \Leftrightarrow \quad \forall \mathfrak{A} \, [(\forall s_1 \mathfrak{A} \models \phi[s_1]) \Rightarrow (\forall s_2 \, (\mathfrak{A} \models \psi[s_2]))] \\
& \Leftrightarrow \quad \forall \mathfrak{A} \, [(\forall s_1 \mathfrak{A} \models x < y[s_1]) \Rightarrow (\forall s_2 (\mathfrak{A} \models z < w[s_2]))]
\end{aligned}$$

Videre har vi at:

$$\begin{aligned}
\not\models \phi \to \psi \quad & \Leftrightarrow \quad \not\models [\neg \phi \vee \psi] \\
& \Leftrightarrow \quad \neg \forall \mathfrak{B} \forall s \, [\mathfrak{B} \models \neg \phi \vee \psi[s]] \\
& \Leftrightarrow \quad \exists \mathfrak{B} \exists s \, [\mathfrak{B} \not\models \neg \phi[s] \vee \psi[s]] \\
& \Leftrightarrow \quad \exists \mathfrak{B} \exists s \, [\mathfrak{B} \models \phi[s] \wedge \neg \psi[s]] \\
& \Leftrightarrow \quad \exists \mathfrak{B} \exists s \, [\mathfrak{B} \models \phi[s] \text{ og } \mathfrak{B} \not\models \psi[s]] \\
& \Leftrightarrow \quad \exists \mathfrak{B} \exists s \, [\mathfrak{B} \models x < y[s] \text{ og } \mathfrak{B} \not\models z < w[s]]
\end{aligned}$$

Anta nå at $\psi \models \psi$ og la $\mathfrak{B}$ være en modell slik at $\mathfrak{B} \models \phi[s_1]$ og $\mathfrak{B} \models \psi[s_2]$ for to tolkningsfunksjoner s_1 og s_2.

La nå $s = s_1[z|y][w|x]$. Da er $\psi[s] \equiv y < x$. La

$$<^{\mathfrak{B}} = \{\langle x, y \rangle \; | x < y \; \forall xy \in \mathbb{N}\}$$

Dermed har vi skaffet til veie en modell $\mathfrak{B}$ som oppfyller ϕ og ψ under henholdsvis s_1 og s_2 og som oppfyller ϕ men ikke ψ under s. Vi har dermed skaffet til veie et eksempel der to formler er ekvivalente i svak betydning, men som *ikke* er ekvivalente i sterk betydning som var det vi skulle bevise. Merk at det siste beviset utnytter at formlene ikke er setninger - de inneholder frie variabler. Distinksjonen sterk/svak ekvivalens faller sammen dersom en begrenser seg til setninger.

$\square$

Essensen av beviset er at en ikke kan slutte fra $\mathfrak{A} \not\models \phi$ til $\mathfrak{A} \models \neg\phi$, når ϕ inneholder frie variabler noe en kan se, forhåpentligvis litt mer overskuelig, fra følgende eksempel:

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{A} \not\models x < y & \mathfrak{A} \models \neg x < y \\
\Longleftrightarrow & \Longleftrightarrow \\
\neg[\mathfrak{A} \models x < y] & \forall s \mathfrak{A} \models \neg x < y[s] \\
\Longleftrightarrow & \\
\neg[\forall s \mathfrak{A} \models x < y[s]] & \\
\Longleftrightarrow & \\
\exists s \mathfrak{A} \not\models x < y[s] & \\
\Longleftrightarrow & \\
\exists s \mathfrak{A} \models \neg x < y[s] &
\end{array}$$

Den ivrige oppfordres til å vise at dette gjelder generelt ved å vise at enhver setning som er sann under en tolkningsfunksjon er sann under enhver tolkningsfunksjon.

La oss i lys av ekvivalent og ikke ekvivalent-beviset være enige om at ikke alt sant er skjønt!, evt. at ikke alle bevis for hva sant er, er skjønne. Vi skal nå bli enige om hva vi skal kreve for å si at vi har bevist noe. Beviset over var semantisk. Det er ikke noe galt med semantiske bevis, men vi ønsker oss noe langt mer hjernedødt, noe hardt og mekanisk. Vi ønsker å bevise formler med kun endelige midler og uten å tilskrive dem mening. På samme måte som en datamaskin kan regne ut ting, uten å vite hva bitene, alle nullene og enerene, står for, ønsker vi å kunne lage regler slik at vi kan syntaktisk utlede en formel fra andre uten å vite hva formlene betyr. Hilbert spøker i kulissene.

7 Beviskalkyle

Vi skal nå gi en beskrivelse av et bevissystem, eller en beviskalkyle. Vi er ikke altfor interessert i å gå i detaljer her. Det viktige er å forstå hva alle bevissystem har og må ha felles. Det viktigste her er at bevis er endelige syntaktiske objekter - de har en begynnelse og en slutt. De vanligste bevissystemene er naturlig deduksjon, trestrukturer og aksiomatiske systemer. Alle har sine fordeler og ulemper, men generelt så egner naturlig deduksjon seg for mennesker, trestrukturer for automater, og aksiomatiske systemer for metamatematikere. Grunnen til det siste er at vi er interesserte i hvilke matematiske teorier som lar seg fange i første ordens logikk. Vi skal se at tallteori og mengdelære er to slike eksempler. Disse to teoriene har forskjellige ikke-logiske aksiomer (med mindre en er logisist da), og vi ønsker et bevissystem som lett lar oss forandre aksiomer. Bevissystemet vi skal se på har fire logiske aksiomer og to slutningsregler. Et bevis, eller utledning, i vårt system vil være en endelig liste med formler - $\langle \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \rangle$. Hvis vi har en mengde ikke-logiske aksiomer Σ og gjør et bevis $\langle\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\rangle$, sier vi at vi har gjort en Σ-utledning av ϕ_n. I så tilfelle skriver vi '$\Sigma \vdash \phi_n$' som uttrykker metaspråksetningen 'ϕ_n er bevisbar fra Σ'. Vi betegner mengden av logiske aksiomer med 'Λ'. Logiske og ikke-logiske aksiom kan en skrive opp hvor som helst i et bevis.

Litt mer formelt:

Definisjon 7.1. Anta at Σ er en mengde av $\mathcal{L}$-formler og at D er en endelig liste $\langle\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\rangle$ av $\mathcal{L}$-formler. Vi sier at D er en *deduksjon* fra Σ dersom for alle $1 \leq i \leq n$, enten

1. $\phi_i \in \Lambda$ (ϕ_i er et logisk aksiom), eller
2. $\phi_i \in \Sigma$ (ϕ_i er et ikke-logisk aksiom), eller
3. Det finnes en regel $\langle\Gamma, \phi_i\rangle$ slik at $\Gamma \subseteq \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{i-1}\}$.

7.1 Logiske aksiomer

Før vi setter i gang må vi vite hva det vil si å *substituere*, og at en term er *substituerbar* for en variabel. Vi holder oss til det uformelle:

Formelen ϕ^x_t betegner formelen ϕ der vi har byttet ut, *substituert*, alle frie forekomster av x med termen t. F.eks. er $[f(x) = S(x)]^x_t \equiv [f(t) = S(t)]$, mens $[\forall x(f(x)) = S(x)]^x_t \equiv [\forall x(f(x)) = S(t)]$.

En term t er *substituerbar* for en variabel x i en formel ϕ dersom ingen variabler i t blir bundet når en substituerer. Dersom $t \equiv f(x)$ er altså t ikke substituerbar for y i $\forall x(x = y)$ siden 'x' i $f(x)$ ville blitt bundet av kvantoren. Dog er $\forall x(x = y)^y_{f(x)} \equiv \forall x(x = f(x))$.

Vi har tre likhets aksiomer og ett kvantor aksiom.

E1

$x = x$, for hver variabel x.

E2

$[x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n] \rightarrow [f(x_1, x_2, \ldots x_n) = f(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$
for hver n-ært funksjonssymbol f.

E3

$[x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n] \rightarrow [R(x_1, x_2, \ldots x_n) \rightarrow R(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$
for hver n-ært relasjonssymbol R.

Q

$\forall x\phi \rightarrow \phi^x_t$
hvis t er substituerbar for x i ϕ.

7.2 Slutningsregler

Vi betegner slutninger som par $\langle \Gamma, \theta \rangle$, og krever at Γ er en endelig mengde formler.

QR - Kvantor-regel
: Dersom x ikke er fri i ψ,
$\langle \{\psi \rightarrow \phi\}, \psi \rightarrow \forall x \phi \rangle$

PC - Proposisjonell konsekvens
: Slutningen $\langle \Gamma, \theta \rangle$ er en **PC**-slutning dersom $\Gamma_P \vDash_P \phi_P$. Siden vi har fetisj for symboler så beriker vi metaspråket vårt ved å la

$$\Gamma \vDash_P \phi \;\Leftrightarrow_{\text{def}}\; \Gamma_P \vDash_P \phi_P$$

Denne regelen er lett, men krever litt mer beskrivelse. Metoden er å proposisjonalisere første ordens formler. Prosedyren for å proposisjonalisere formelen β er slik:

1. Finn alle subformler av β på formen $\forall x \alpha$ som ikke er i skopet til andre kvantorer. Gi en slik formel en proposisjonsbokstav - f.eks. A. Dersom samme formelen forekommer flere ganger, så sørg for at alle instansene blir representert ved samme bokstav.

2. Finn alle atomære formler som gjenstår og distribuer uniformt nye bokstaver til atomære formler.

Et eksempel er sikkert greit. Proposisjonaliseringen av $\forall x(\alpha \vee \beta) \wedge \alpha$ blir $A \wedge B$. A for $\forall x(\alpha \vee \beta)$, og B for α. Vi betegner en proposisjonalisert formel, eller mengde av formler, med subskriptet '$_P$'; ϕ_P, og Γ_P.

For de av dere som er litt ustø hva angår proposisjonslogikk, så sier vi, litt uformelt, at en formel ϕ_P er en *proposisjonell konsekvens* av en mengde formler Γ_P dersom ϕ_P er sann i alle tilfellene der Γ_p er det. Dersom en skriver ut en sannhetstabell, så skal altså konsekven*s*en (en konsekvent er noe annet!) være sann i minst alle radene der konjunksjonen, '$\wedge$', av alle premissene er sanne. Vi skriver $\Gamma_P \vDash_P \phi_P$ for metautsagnet 'ϕ_P er en proposisjonell konsekvens av Γ_P'.

Formelt er '$\theta_P \vDash_P \Gamma_P$' definert via valuasjonsfunksjoner slik: La Δ være mengden av alle proposisjonelle atomære formler. Da er $v : \Delta \rightarrow \{\top, \bot\}$ en valuasjonsfunksjon som for hver formel $\gamma \in \Delta$ gir en sannhetsverdi, $\top$ eller $\bot$. En utvider så v til å gjelde alle proposisjonelle formler på den eneste opplagte måten. $\Sigma \vDash_P \theta$ er da tilfellet dersom

$$\forall v \forall \sigma \in \Sigma[v(\sigma) = \top \Rightarrow v(\theta) = \top]$$

Enhver valuasjon som gjør premissene sanne, gjør altså konklusjonen sann.

Det burde dermed være lett å se at dersom Γ_P er mengden $\{\gamma_{1P}, \gamma_{2P}, \dots, \gamma_{nP}\}$, så har vi at

$\Gamma_P \vDash_P \phi_P$

$\iff$

'$[(\gamma_{1P} \wedge \gamma_{2P} \wedge \dots \wedge \gamma_{nP}) \to \phi_P]$' er en tautologi

$\iff$

$\emptyset \vDash_P [(\gamma_{1P} \wedge \gamma_{2P} \wedge \dots \wedge \gamma_{nP}) \to \phi_P]$

Den første ekvivalensen kalles *deduksjonsteoremet* for proposisjonslogikk, og er en fin øvelse! Den ivrige kan også prøve å bevise at dersom θ_P er en tautologi, så er θ er gyldig, og at det omvendte ikke holder.[20]

7.3 Noen eksempler

Vi viser nå noen eksempler på bevis i bevissystemet. Først skal vi vise at kalkylen vår er sterk nok til å bevise at '=' er en ekvivalensrelasjon.

Identitetslemma.

1. $\vdash x = x$
2. $\vdash x = y \to y = x$
3. $\vdash x = y \wedge y = z \to x = z$

Bevis.

1.

a.	$x = x$	E1

2.

a.	$[x = y \wedge x = x] \to [x = x \to y = x]$	E3
b.	$x = x$	E1
c.	$x = y \to y = x$	PC, a, b

3.

a.	$[x = x \wedge y = z] \to [x = y \to y = z]$	E3
b.	$x = x$	E1
c.	$x = y \wedge y = z \to x = z$	PC, a, b

□

[20]Hint: La $A_1, A_2, \dots A_k$ være alle de proposjonelle variablene i θ_P. La så

$$v_{\mathfrak{A}}(A_i) = \begin{cases} \top & \text{hvis } \psi_P = A_i \text{ og } \mathfrak{A} \vDash \psi \\ \bot & \text{ellers} \end{cases}$$

Vis først at $\mathfrak{A} \vDash \theta \Leftrightarrow v_{\mathfrak{A}}(\theta_P) = \top$, og bruk dette til å vise at $\vDash_P \theta_P \Longrightarrow \vDash \theta$.

Vi kan også legge til eller fjerne allkvantorer i enhver formel i et bevis:

Kvantor lemma.

$$\Sigma \vdash \theta \iff \Sigma \vdash \forall x \theta$$

Bevis.

$\Longrightarrow$

1.	θ	Antagelse: $\Sigma \vdash \theta$
2.	$y = y \to \theta$	PC, 1
3.	$y = y \to \forall x \theta$	QR, 2 - x er ikke fri i $y = y$
4.	$y = y$	E1
5.	$\forall x \theta$	PC, 3, 4

$\Longleftarrow$

1.	$\forall x \theta$	Antagelse: $\Sigma \vdash \forall x \theta$
2.	$\forall x \theta \to \theta^x_x$	Q, x er alltid substituerbar for x og $\theta^x_x \equiv \theta$
3.	θ	PC, 1, 2

□

Merk her at numereringen til venstre ikke er med i kalkylen. Det er heller ikke begrunnelsene til høyre. Et bevis er en liste av formler. Av leselighetsgrunner skriver vi formlene under hverandre, og for å kunne se hvilke regler og premisser vi bruker, nummererer og begrunner vi bevisstegene. Ontologisk sett er ethvert bevis kun en endelig liste av syntaktiske formler.

Deduksjonsteoremet. Dersom θ er en *setning*, og Σ er en menge formler, da har vi at

$$\Sigma \cup \theta \vdash \phi \iff \Sigma \vdash \theta \to \psi$$

Bevis. Vi godtar dette *bona fide.* □

8 Sunnhet - en skisse

Sunnhet. Et bevissystem er *sunt* dersom for alle mengder av ikke-logiske aksiomer Σ, og alle formler ϕ slik at en kan utlede ϕ fra Σ, da er enhver modell for Σ også en modell for ϕ (som er ekvivalent med at ϕ er en logisk konsekvens av Σ). I symboler skriver vi

$$\Sigma \vdash \phi \Rightarrow \Sigma \vDash \phi$$

For å bevise at vår kalkyle er sunn, må vi først vise at alle logiske aksiomer er gyldige. Så må vi vise at alle slutningsreglene er sannhetsbevarende - altså dersom $\langle \Gamma, \theta \rangle$ er en slutningsregel, da er $\Gamma \vDash \theta$. Hvis en har kommet så langt gjenstår det kun å vise at $\mathsf{Thm}_\Sigma = \{\phi \mid \Sigma \vdash \phi\} \subseteq C = \{\phi \mid \Sigma \vDash \phi\}$.

9 Aksiomene for tallteori og mengdelære

Vi skal nå se på to forskjellige mengder av ikke-logiske aksiomer - aksiomene for tallteori, og aksiomene for mengdelære.

9.1 Alt er tall

Vi skal nå introdusere aksiomene for tallteori som vi benevner med 'N'. Signaturen vi jobber med er $\mathcal{L}_{NT} = \{0, S, +, \times, E, <\}$. Aksiomene er svakere enn den mer vanlige aksiommengden, aksiomene for Peano aritmetikk, 'PA'. Vi har ikke induksjon, slik som i PA, men vi har et symbol for eksponentfunksjonen, 'E', noe som gjør livet litt lettere.

$$
\begin{array}{ll}
1. & \forall x[Sx \neq 0] \\
2. & \forall x \forall y[S(x) = S(y) \rightarrow x = y] \\
3. & \forall x[x + 0 = x] \\
4. & \forall x \forall y[x + S(y) = S(x + y)] \\
5. & \forall x[x \times 0 = 0] \\
6. & \forall x \forall y[(x \times S(y) = (x \times y) + x] \\
7. & \forall x[xE0 = S(0)] \\
8. & \forall x \forall y[xES(y) = xEy \times x] \\
9. & \forall x[x \not< 0] \\
10. & \forall x \forall y[x < S(y) \leftrightarrow (x < y \vee x = y)] \\
11. & \forall x \forall y[x < y \vee x = y \vee y < x]
\end{array}
$$

Disse aksiomene utgjør det som kalles Robinsonaritmetikk, og betegnes ofte med 'Q'. Vi holder oss til 'N'. Vi innfører en liten konvensjon. Hvis n er et naturlig tall, da er $\bar{n}$ $\mathcal{L}_{NT}$-termen $\underbrace{SSS \dots S}_{n\, S-er} 0 = S^n 0$.

Følgende gjelder for alle naturlige tall a og b:

Tall lemma.

$$
\begin{array}{llcl}
1. & a = b & \Rightarrow & N \vdash \bar{a} = \bar{b} \\
2. & a \neq b & \Rightarrow & N \vdash \bar{a} \neq \bar{b} \\
3. & a < b & \Rightarrow & N \vdash \bar{a} < \bar{b} \\
4. & a \not< b & \Rightarrow & N \vdash \bar{a} \not< \bar{b} \\
5. & N \vdash \bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} & & \\
6. & N \vdash \bar{a} \times \bar{b} = \overline{a \times b} & & \\
7. & N \vdash \bar{a} E \bar{b} = \overline{a^b} & &
\end{array}
$$

Det er en fin øvelse i induksjonsbevis å bevise påstandene over!

9.2 $a + b = b + a$?

Vi skal nå kjapt se på to bevis som viser en begrensing til våre tallaksiomer. La oss først bli enige om hva '*isomorfe strukturer*' skal bety.

Isomorfe Strukturer. Vi sier at to $\mathcal{L}$ strukturer, $\mathfrak{A}$ og $\mathfrak{B}$ er *isomorfe*, og skriver $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ dersom det finnes en bijeksjon $i : A \to B$ slik at for ethvert konstantsymbol c i $\mathcal{L}$, $i(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$, for ethvert n-ært funksjonssymbol f, og alle $a_1, \ldots a_n \in A$, $i(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathfrak{B}}(i(a_1), \ldots, i(a_n))$, og for ethvert n-ært relasjonssymbol R, $\langle a_1, \ldots a_n \rangle \in R^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow \langle i(a_1), \ldots, i(a_n) \rangle \in R^{\mathfrak{B}}$. Vi kaller i en *isomorfisme.*

Dersom to modeller er isomorfe, ser de altså helt like ut - de har like mange elementer, og tolker alle symbolene likt. De eneste som skiller to isomorfe strukturer er tingene i domenet, aldri deres funksjonelle/relasjonelle rolle. Hva første ordens matematikk og logikk angår er det likegyldig hvilken av to isomorfe modeller en velger.

Først skal vi vise at $N \nvdash x \not< x$, og $N \nvdash x + y = y + x$. Vi tar begge i samme slengen. Dersom det var slik at $N \vdash x \not< x$, og $N \vdash x + y = y + x$, da måtte, via sunnhet, enhver modell for N være en modell for '$x \not< x$' og '$x + y = y + x$'. Vi lager nå en modell $\mathfrak{A}$, for N, men som ikke er en modell for verken '$x \not< x$' eller '$x + y = y + x$'.

La domene A til $\mathfrak{A}$ være $\mathbb{N} \cup \{\alpha, \beta\}$.

$$S^{\mathfrak{A}}(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{hvis } x \in \mathbb{N} \\ x & \text{hvis } x \in \{\alpha, \beta\} \end{cases}$$

$$x +^{\mathfrak{A}} y = \begin{cases} x + y & \text{hvis } x, y \in \mathbb{N} \\ x & \text{hvis } x \in \{\alpha, \beta\} \text{ og } y \in \mathbb{N} \\ y & \text{hvis } x \in \mathbb{N} \text{ og } y \in \{\alpha, \beta\} \\ x & \text{hvis } x, y \in \{\alpha, \beta\} \end{cases}$$

$$<^{\mathfrak{A}} = A \cup B \cup C$$

hvor

$$\begin{aligned} A = & \ \{\langle x, y \rangle \mid x < y \text{ og } x, y \in \mathbb{N}\} \\ B = & \ \{\langle x, y \rangle \mid x \in \mathbb{N} \text{ og } y \in \{\alpha, \beta\}\} \\ C = & \ \{\langle \alpha, \beta \rangle, \langle \beta, \beta \rangle\} \end{aligned}$$

I $\mathfrak{A}$ er det altså slik at $\alpha + \beta = \alpha$, mens $\beta + \alpha = \beta$, og $\beta < \beta$. For å fullføre beviset, må en vise hvordan $\mathfrak{A}$ tolker '$\times$' og 'E', samt at $\mathfrak{A} \models N$. Dette overlates til den ivrige.

Er så $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{A}$? Svaret er nei. Det finnes åpenbart en bijeksjon $i : \mathbb{N} \to A$, men i kan ikke være en isomorfisme siden det i A finnes elementer y slik at $x <^{\mathfrak{A}} y$ holder for uendelig mange x, mens det ikke finnes noen $y \in \mathbb{N}$ slik at $x <^{\mathfrak{N}} y$ holder for uendelig mange x. Leseren oppfordres til å fullføre argumentet ved å vise at det ikke finnes noen i slik for alle funksjonssymboler $f \in \mathcal{L}_{NT}$, og for alle $a_1, \ldots a_n \in A$, $i(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathfrak{B}}(i(a_1), \ldots, i(a_n))$.

Å hevde at det finnes tall som er større enn seg selv virker kanskje på lik linje med at benekte at identitet er nødvendig. Det er det kanskje også men her gjelder det å holde tungen, og objekt- vs. metaspråk bent i munnen.

I $\mathfrak{A}$ er det ikke slik at tall er større enn seg selv av den enkle grunn at $<^{\mathfrak{A}}$ ikke er 'større enn' relasjonen, men noe som bare ligner. En er fri til å bestemme ekstensjonene til tolkningene av relasjonssymboler hvordan en enn vil. Hvordan den *egentlige* relasjonen 'større enn' enn måtte være, så er dette, hva første ordens matematikk og logikk angår, igjen likegyldig!

Kunne vi ikke bare legge til et aksiom slik at vi garanterer at addisjon er kommutativt? Joda, vi kunne utvidet N med aksiomet

$$\forall x \forall (x + y = y + x)$$

Spørsmålet er om vi kunnet utvidet N til N^+ slik at

$$\forall \mathfrak{A}[\mathfrak{A} \models N^+ \Rightarrow \mathfrak{A} \cong \mathfrak{N}]$$

Vi skal senere se at dette ikke er tilfellet, og at alle første ordens teorier har ikke-standard modeller. Vi skal senere se at dette er tilfellet dersom vi formaliserer aritmetikk i andre ordens logikk, men først skal vi se litt nærmere på aksiomene for mengdelære.

9.3 Alt er mengder

En skal lete lenge etter en matematikkbok som ikke nevner mengder. Det finnes et hav av forskjellige teorier om mengder. Zermelo foreslo at $\mathbb{N} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots\}$. Tallet 0 er altså den tomme mengden, tallet 1 er mengden av den tomme mengden osv. von Neumann foreslo at $\mathbb{N} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots\}$. For Zermelo er altså $2 \in 3$, mens $1 \notin 3$, mens hos von Neumann er $n \in m$ for alle $n < m$. Det disse to har felles er at en kan generere alle tallene fra den tomme mengden. Det blir ofte hevdet at en kan redusere, eller modellere, all matematikk til mengdelære. Språket for mengdelære er kun $\{\in\}$, så her har vi noe som må kunne kalles minimalt - vi trenger ingen objekter utover den tomme mengde, og kun et tegn.

Merk at vi i det følgende kvantifiserer over mengder, men kun mengder, så dette er fremdeles et førsteordens språk. Her er noen av aksiomene for mengdelære:

Ekstensjonalitet
$\forall x \forall y \forall z[x = y \leftrightarrow (z \in x \leftrightarrow z \in y)]$

Den tomme mengde finnes
$\exists x \forall y[y \notin x]$

Par - har en to så har en tre
$\forall x \forall y \exists z[x \in z \wedge y \in z]$

Union

$\forall x \exists y \forall z \forall v[z \in x \land v \in z \to v \in y]$

La oss definere $\subseteq$ for å unngå for mye søl:
$a \subseteq b \Leftrightarrow_{def} \forall x[x \in a \to x \in b]$

Delmengder er òg mengder

$\forall x \forall y \exists z[y \subseteq x \to y = z]$

Potensmengde, $\mathcal{P}(x)$

$\forall x \forall y \exists z[y \subseteq x \to y \in z]$

Følgende er teoremer (bevisbare setninger) i mengdelære: Det finnes en tellbart uendelig mengde. Dersom en mengde a finnes, så finnes potensmengden til a - $\mathcal{P}(a)$. Hvis a er tellbart uendelig, da er $\mathcal{P}(a)$ utellbar (Cantors argument). Det finnes altså objektspråk-setninger som sier at det finnes utellbare mengder. Vi skal se at det finnes modeller for mengdelære som er tellbare - objektspråk-setningen 'det finnes utellbare mengder' er altså sann i en tellbar modell. Dette kalles Skolems paradoks, og følger av Löwenheim-Skolem teoremet. Dette teoremet følger av kompakthetsteoremet, som igjen følger av kompletthetsteoremet. Dette impliserer at vi ikke kan beskrive de naturlige tallene uansett hvor mange aksiomer vi legger til. Kompletthet, en ønskelig egenskap ved en logikk, leder altså til en sterk begrensning; manglende evne til å beskrive strukturer. Vi skal bruke en del tid på å bevise varianter av Löwenheim-Skolem teoremet, både fordi det er fine øvelser i modellteori og fordi teoremene rager høyt på listen over manglene ved første ordens logikk, men før vi kommer så langt må vi bli enige om hva det vil si at en logikk er komplett, kompakt, og hva en ikke-standard modell er.

10 Kompletthet - Mens sana in corpore sano

10.1 Gödel gjør sin entré

Kurt Gödel beviste kompletthetsteoremet i 1929 i sin doktoravhandling. Teoremet sier at hvis en formel ϕ er en logisk konsekvens av en mengde formler Σ, da kan en utlede ϕ fra Σ. I formler blir det

$$\Sigma \models \phi \Rightarrow \Sigma \vdash \phi$$

Hvis vi tar det kontrapositive av kompletthetsteoremet får vi:

$$\Sigma \nvdash \phi \Rightarrow \Sigma \nvDash \phi$$

Vi har ikke bevist deduksjonsteoremet for første ordens logikk:

$$\Sigma \vdash \phi \to \psi \iff \Sigma \cup \{\phi\} \vdash \psi$$

men vi får bruk for dette meget hendige teoremet i det følgende (dette gjelder bare for setninger, ikke for åpne formler!)[21]. Grunnen til at det er hendig er at det forenkler bevise for den kontrapositive versjonen av kompletthet. Det er nemlig tilstrekkelig å bevise

$$\Sigma \nvdash \bot \Rightarrow \Sigma \nvDash \bot$$

altså dersom Σ er konsistent, da finnes det en modell for Σ[22]. At $\Sigma \nvDash \bot$ sier at det finnes en modell for Σ ser en av, i vårt kvasiformaliserte metaspråk, følgende ekvivalente påstander:

$$\begin{array}{l} \Sigma \nvDash \bot \\ \neg[\Sigma \vDash \bot] \\ \neg[\forall \mathfrak{A}[\mathfrak{A} \vDash \Sigma \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \bot] \\ \exists \mathfrak{A}[\mathfrak{A} \vDash \Sigma \land \mathfrak{A} \nvDash \bot] \\ \exists \mathfrak{A}[\mathfrak{A} \vDash \Sigma] \end{array}$$

La oss først bevise at det er tilstrekkelig å vise at $\Sigma \nvdash \bot \Rightarrow \Sigma \nvDash \bot$. La oss anta at vi har vist $\Sigma \vDash \bot \Rightarrow \Sigma \vdash \bot$ og at $\Sigma \vDash \phi$ for en eller annen *setning* ϕ.[23] Siden $\bot$ er en logisk konsekvens av Σ, da er åpenbart $\bot$ også en logisk konsekvens av $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ og samme utledning fra Σ av $\bot$ kan gjøres fra $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$, så $\Sigma \cup \{\neg\phi\} \vdash \bot$. Det følger dermed fra deduksjonsteoremet og regelen PC at $\Sigma \vdash \phi$.

Alt vi trenger å gjøre er altså å vise at for enhver konsistent mengde setninger Σ, så finnes det en modell for Σ. Det festlige, som Leon Henkin viste i 1949, er at modellen vi må dra ut av hatten kan være en term-modell - elementene i universet til modellen er termene i formlene i Σ. I denne modellen denoterer objektspråknavnet 'c' rett og slett tegnet c. En syntaktisk streng av symboler refererer altså til seg selv. Dette er spennende i seg selv qua selvreferanse, med også interessant siden kompletthetsteoremet sier, litt upresist, at alt semantisk gyldig er syntaktisk utledbart, og dermed, via sunnhet, at semantikk og syntaks, hva første ordens logikk angår går ut på det samme.

Det viktige å holde fast på er at for enhver mengde formler Σ og enhver formel ϕ, så gjelder følgende:

$$\Sigma \vDash \phi \iff \Sigma \vdash \phi$$

[21] I det følgende kan en la $\bot \equiv \forall x[x = x] \land \neg\forall x[x = x]$.

[22] Ser du at '$\Sigma \nvdash \bot$' sier at Σ er konsistent? 'Konsistens' er altså en term som hører til de syntaktiske sfærer, og har ingenting med semantikk å gjøre. *Mengden* $\{A \land \neg A\}$ er inkonsistent fordi en fra denne mengde kan syntaktisk derivere både A og $\neg A$.

[23] At det er en setning forringer ikke generaliteten til beviset siden vi har vist at $\Sigma \vdash \theta \iff \Sigma \vdash \forall x\theta$. Vi har også at $\Sigma \vDash \theta \iff \Sigma \vDash \forall x\theta$. Beviset overlates til leseren.

10.2 Kompakthet - Good things gone sour

Vi skal nå se at det at vår logikk er sunn og komplett,[24] impliserer kompakthet, og at kompakthet impliserer at det finnes ikke-standard modeller for N.

Kompakthet. La Σ være en mengde formler. Da finnes en modell for Σ hvis og bare hvis enhver endelig delmengde Σ_* av Σ har en modell.

Siden vi er glad i kvantifiserte metasetninger, oversetter vi også kompakthetsteoremet:

$$\exists\mathfrak{A}[\mathfrak{A} \models \Sigma] \iff \forall\Sigma_*\big[\Sigma_* \subseteq \Sigma \wedge |\Sigma_*| < \aleph_0 \Rightarrow \exists\mathfrak{B}[\mathfrak{B} \models \Sigma_*]\big]$$

Dette er langt fra intuitivt. Modellene for delmengdene trenger ikke ha noe til felles med modellen for helmengden!

Bevis. Hvis Σ har en modell $\mathfrak{A}$, så er åpenbart $\mathfrak{A}$ også modell for enhver endelig delmengde av Σ. Det gjenstår å vise det kontrapositive, altså

$$\begin{aligned}
&\forall\Sigma_*\big\{\Sigma_* \subseteq \Sigma \wedge |\Sigma_*| < \aleph_0 \Rightarrow \exists\mathfrak{B}[\mathfrak{B} \models \Sigma_*]\big\} \Rightarrow \exists\mathfrak{A}[\mathfrak{A} \models \Sigma] \\
&\iff \\
&\neg\exists\mathfrak{A}[\mathfrak{A} \models \Sigma] \Rightarrow \neg\forall\Sigma_*\big\{\Sigma_* \subseteq \Sigma \wedge |\Sigma_*| < \aleph_0 \Rightarrow \exists\mathfrak{B}[\mathfrak{B} \models \Sigma_*]\big\} \\
&\iff \\
&\neg\exists\mathfrak{A}[\mathfrak{A} \models \Sigma] \Rightarrow \exists\Sigma_*\big\{\Sigma_* \subseteq \Sigma \wedge |\Sigma_*| < \aleph_0 \wedge \neg\exists\mathfrak{B}[\mathfrak{B} \models \Sigma_*]\big\}
\end{aligned}$$

Vi må altså bevis at dersom Σ ikke har en modell, så finnes det en endelig delmengde av Σ som ikke har en modell. Men dette er lett å vise. At Σ ikke har en modell er det samme som at enhver modell for Σ er en modell for $\perp$. Altså er $\Sigma \models \perp$. Fra kompletthet følger det da at $\Sigma \vdash \perp$. Siden alle utledninger er endelige, følger det at en kan utlede $\perp$ ved å bare bruke endelig mange formler fra Σ - vi har altså at $\Sigma_* \vdash \perp$. Fra sunnhet følger det så $\Sigma_* \models \perp$, som er ekvivalent med at Σ_* ikke har en modell som var det vi skulle bevise. □

10.3 Ikke-standard modeller

Det er nå på tide å se på noen applikasjoner av kompakthet. Men før vi gjør så trenger vi noen flere definisjoner.

Teorien til $\mathfrak{A}$. La $\mathfrak{A}$ være en $\mathcal{L}$ struktur. Da er
$Th(\mathfrak{A}) = \{\phi \mid \phi \text{ er en } \mathcal{L}\text{-setning, og } \mathfrak{A} \models \phi\}$, og kalles teorien til $\mathfrak{A}$.

[24] En sier av og til at deduksjonssystemet er *adekvat* for semantikken. Dette er kanskje noe partisk mht. debatten om semantikken til de logiske konnektivene er modellteoretisk bestemt, slik de er i Tarskis semantikk, eller bestemt av dekuksjonsreglene for et bevissystem - 'proof-theoretic semantics'.

Elementær ekvivalens. Vi sier at to $\mathcal{L}$-strukturer, $\mathfrak{A}$ og $\mathfrak{B}$, er *elementært ekvivalente* og skriver $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ dersom $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$. Dersom $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{N}$, sier vi at $\mathfrak{A}$ er en modell for aritmetikk.

La oss nå utvide $\mathcal{L}_{NT}$ med en ny konstant c. La så

$$\Theta = Th(\mathfrak{N}) \cup \{0 < c, S0 < c, \dots, S^n 0 < c, S^{n+1} 0 < c, \dots\}$$

For enhver endelig delmengde Θ_* av Θ så finnes det et tall n slik at

$$\Theta_* \subseteq (Th(\mathfrak{N}) \cup \{0 < c, S0 < c, \dots, S^n 0 < c\})$$

For enhver slik delmengde lager vi en modell $\mathfrak{N}_n$ og bestemmer at $\mathfrak{N}_n$ er helt lik $\mathfrak{N}$ bortsett fra at $c^{\mathfrak{N}_n} = n + 1$. En ser da at enhver endelig delmengde av Θ har en modell, og dermed, via kompakthet, har også Θ en modell $\mathfrak{A}'$. I denne modellen finnes det et element, et *ikke-standard* element, $c^{\mathfrak{A}'}$, som er større enn alle de naturlige tallene.

Vi krevde i definisjonen av elementær ekvivalens at begge modellene var modeller for det samme språket. $\mathfrak{A}'$ er en $\mathcal{L}_{NT \cup c}$-modell, men hvis vi begrenser $\mathfrak{A}'$ til en $\mathcal{L}_{NT}$-modell, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \restriction_{\mathcal{L}_{NT}}$, ser vi at $c^{\mathfrak{A}'}$ aldri kan bli eksplisitt referert til. En kan dermed vise, ved gjøre induksjon på strukturen til en formel, at $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{N}$. $\mathfrak{A}$ kalles en ikke-standard modell for aritmetikk. Derimot er $\mathfrak{A} \not\cong \mathfrak{N}$. Grunnen er den samme som i beviset for at $N \nvdash x + y = y + x$.

10.4 Primtallsmodeller

Vi har allerede sett en ikke-standard modell for aritmetikk. Vi skal nå lage en modell for aritmetikk hvis univers kommer til å være alle primtallene. La oss kalle modellen for $\mathfrak{P}$. P er altså $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots\}$. La oss kalle 2 for det nullte primtallet, 3 for det første primtallet, osv. Vi skal lage en modell for aritmetikk, så vi må bestemme hvordan $\mathfrak{P}$ skal tolke språket $\mathcal{L}_{NT} = \{0, S, +, \times, E, <\}$. Modellen vi skal lage er en ordenstallmodell, så la oss si litt om ordenstall først. Tallene $0, 1, 2, 3, \dots$ brukes på to måter. Den ene er når en sier 'hvor mange frukt har Kari når Per gir henne fem epler, og Lise gir henne sju mandariner?'. Svaret er selvfølgelig tretten. 'Fem', 'sju', og 'tretten' er her tall som er mål på antall. Slike tall kalles *kardinaltall.* 0 som et kardinaltall svarer da til å ha ingen i antall av det som måles. Den andre måten å bruke tall på er som følger: 'Kari er nummer fem i køen, som er bakerst, og går for å kjøpe seg en kaffe. I mellomtiden kommer det sju personer som stiller seg i køen. Hvilken plass i køen får Kari når hun kommer tilbake, hvis tre personer har blitt ekspedert i mellomtiden?' Svaret er selvfølgelig at hun får den tiende plassen. I setningen over fungerer 'fem', og 'tiende' i svaret, som et mål på, eller navn på en ordningsrelasjon og kalles *ordinaltall.* Kari er det femte elementet i en rekke, mens 'sju' ble brukt som et kardinaltall. 0 som et ordinaltall i eksempelet over svarer da til å ikke stå i køen, men å bli ekspedert.

Hvis en ordner primtallene i rekkefølge $p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots$ slik at $p_i < p_j$ for alle $i < j$ så kan et betegne 2 som det nullte primtallet, 3, som det første primtallet osv. Legg merke til at ingen mengde har noen slik ordningsrelasjon med mindre en eksplisitt sier noe slikt som 'la oss se på mengden av alle ...ordnet etter relasjonen ...'. Tallmengder kan ordnes på mange forskjellige måter. F.eks. så vi at de hele tallene kan ordnes etter absoluttverdi samt dersom to tall har samme absoluttverdi, skal det naturlige tallet komme først: $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$.

Vanligvis gjør en matematiske operasjoner på de naturlige tallene, og da faller distinksjonen mellom kardinaltall og ordenstall sammen - fem pluss to er syv og dersom en går to hakk oppover fra det femte tallet kommer en til det syvende tallet. Hvis tallmengden er primtall og ikke naturlige tall, er dette litt vanskeligere.

1) Fem ganger to er ti, mens det femte primtallet ganger det andre primtallet er sekstifem (det femte og andre primtallet er hhv. 13 og 5).

2) Derimot er det femte ordinaltallet ganget med det andre ordinaltallet lik det tiende ordinaltallet, og det tiende primtallet er trettien.

Vi skal nå lage to primtallsmodeller. Den første er modellert etter 1), og den andre etter 2). Målet er å se om en av disse er en modell for aksiomene til aritmetikk.

Vi lister opp noen primtall for å gjøre ting oversiktlig for oss selv og andre:

Ordinaltall	Primtall	Ordinaltall	Primtall	Ordinaltall	Primtall
0	2	11	37	22	83
1	3	12	41	23	89
2	5	13	43	24	97
3	7	14	47	25	101
4	11	15	53	26	103
5	13	16	59	27	109
6	17	17	61	28	113
7	19	18	67	29	127
8	23	19	71	30	131
9	29	20	73	31	137
10	31	21	79	32	139

10.4.1 Primstruktur 1. '2×4' $= 128477$

Vi lar $0^{\mathfrak{P}_1} = 2$, $S^{\mathfrak{P}_1}(x) =$ det $(x+1)$-te primtallet. $x +^{\mathfrak{P}_1} y =$ det $(x+y)$-te primtallet, $x \times^{\mathfrak{P}_1} y =$ det $(x \times y)$-te primtallet, $xE^{\mathfrak{P}_1} y =$ det x^y-te primtallet, og $<^{\mathfrak{P}_1} = \{\langle x, y \rangle \mid x < y\}$.

Et eksempel:

$$\begin{aligned}(S^2 0 \times S^4 0)^{\mathfrak{P}_1} &= (SS0)^{\mathfrak{P}_1} \times^{\mathfrak{P}_1} (SSSS0)^{\mathfrak{P}_1} \\ &= S^{\mathfrak{P}_1} S^{\mathfrak{P}_1} 2 \times^{\mathfrak{P}_1} S^{\mathfrak{P}_1} S^{\mathfrak{P}_1} S^{\mathfrak{P}_1} S^{\mathfrak{P}_1} 2 \\ &= S^{\mathfrak{P}_1} 7 \times^{\mathfrak{P}_1} S^{\mathfrak{P}_1} S^{\mathfrak{P}_1} S^{\mathfrak{P}_1} 7 \\ &= 23 \times^{\mathfrak{P}_1} S^{\mathfrak{P}_1} S^{\mathfrak{P}_1} 23 \\ &= 23 \times^{\mathfrak{P}_1} S^{\mathfrak{P}_1} 97 \\ &= 23 \times^{\mathfrak{P}_1} 523 \\ &= 128477\end{aligned}$$

128477 er altså det $(23 \times 523) = 12029$-te primtallet. Dette går med andre ord galt av sted. La oss være helt sikre. I følge aksiom 5, '$\forall x(x \times 0 = 0)$', burde ethvert tall ganget med det nullte primtallet være lik det nullte primtallet, men vi har f.eks. at:

$$\begin{aligned}(SS0 \times 0)^{\mathfrak{P}_1} &= (SS0)^{\mathfrak{P}_1} \times^{\mathfrak{P}_1} 0^{\mathfrak{P}_1} \\ &= S^{\mathfrak{P}_1} S^{\mathfrak{P}_1} 2 \times^{\mathfrak{P}_1} 2 \\ &= S^{\mathfrak{P}_1} 7 \times^{\mathfrak{P}_1} 2 \\ &= 23 \times^{\mathfrak{P}_1} 2 \\ &= 47\end{aligned}$$

Siden 47 er det (7×2)-te primtallet.

10.4.2 Primstruktur 2. '2×4' = 23

Vi lar primtallene få subskript; $p_0, p_1, p_2 \ldots$, og lar i det følgende $x = p_n$ og $y = p_m$. Nå bestemmer vi at $0^{\mathfrak{P}_2} = p_0$, $S^{\mathfrak{P}_2}(x) = p_{n+1}$ og at $x +^{\mathfrak{P}_2} y = p_{n+m}$, $x \times^{\mathfrak{P}_2} y = p_{n \times m}$, $xE^{\mathfrak{P}_2} y = p_{n^m}$, samt $<^{\mathfrak{P}_2} = \{\langle x, y \rangle \mid x < y\}$.

Vi går gjennom samme eksempel som over, men bruker de nye primtallsnavnene for at det skal bli oversiktlig:

Et eksempel:

$$\begin{aligned}(S^2 0 \times S^4 0)^{\mathfrak{P}_2} &= (SS0)^{\mathfrak{P}_2} \times^{\mathfrak{P}_2} (SSSS0)^{\mathfrak{P}_2} \\ &= S^{\mathfrak{P}_2} S^{\mathfrak{P}_2} p_0 \times^{\mathfrak{P}_2} S^{\mathfrak{P}_2} S^{\mathfrak{P}_2} S^{\mathfrak{P}_2} S^{\mathfrak{P}_2} p_0 \\ &= S^{\mathfrak{P}_2} p_1 \times^{\mathfrak{P}_2} S^{\mathfrak{P}_2} S^{\mathfrak{P}_2} S^{\mathfrak{P}_2} p_1 \\ &= p_2 \times^{\mathfrak{P}_2} S^{\mathfrak{P}_2} S^{\mathfrak{P}_2} p_2 \\ &= p_2 \times^{\mathfrak{P}_2} S^{\mathfrak{P}_2} p_3 \\ &= p_2 \times^{\mathfrak{P}_2} p_4 \\ &= p_{2 \times 4} \\ &= p_8 \\ &= 23\end{aligned}$$

Vi sjekker også at aksiom fem stemmer der x blir tolket som et tilfeldig primtall p_n:

$$\begin{aligned}(x \times 0)^{\mathfrak{P}_2} &= p_n \times^{\mathfrak{P}_2} 0^{\mathfrak{P}_2} \\ &= p_n \times^{\mathfrak{P}_2} p_0 \\ &= p_{n\times 0} \\ &= p_0 \\ &= 2\end{aligned}$$

Vi burde nå gå gjennom alle de elleve aksiomene, men vi overlater det til leseren. Det vesentlige er at $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{P}_2$, og dermed $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{P}_2$.

10.5 Filosofiske smuler
Was sind und was sollen die Zahlen?

Vi har sett to modeller for aritmetikk som er noe anderledes enn det en kanskje først hadde tenkt. Det burde derfor ikke være altfor vanskelig å innse at essensen til elementene i domene til modell for aritmetikk er uvesentlig. I primtallsmodellen spilte 2 rollen som 0. En kunne godt ha laget en oddetallsmodell, eller en fibonacci-modell. En kan også lage modeller av strenger av a-er. La den tomme strengen, ϵ, spille rollen til 0, 'a' er 1, 'aa' er 2, osv. Vi så også i avsnittet om mengdelære at en kan konstruere tallene ut av den tomme mengde på forskjellige måter. Hva er så de naturlige tallene? Har de vesen og væren? Er de abstrakte? Kan en bestemme essensen av tallet 3 uten å nevne noen av de andre tallene? Om dette er logikk og matematikk ravende likegyldig.

Spørsmål slik som 'er tre medlem av fire?' kalles ofte *Benacerrafs identifikasjonsproblem* etter Paul Benacerraf. Vi skal nå kort presentere en retning innen matematikkfilosofi som kalles *strukturalisme*, som mener at slike spørsmål ikke skal svares med at den eller den (eller ingen) teorien om mengder har rett. Man bør heller benekte at spørsmålet selv er vel formulert.

Strukturer/modeller har så langt vært tupler av mengder og objekter, og tupler blir ofte selv sett på som mengder. Den filosofiske posisjonen, matematisk strukturalisme, skiller mellom strukturer og system. Et system er det vi har kalt strukturer så langt, og er en instans/token av det abstrakte objektet struktur. Vi så over at $\mathfrak{N}$ og $\mathfrak{P}_2$ begge var modeller for aritmetikk, og at $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{P}_2$. Disse kalles instanser av naturlig-tall-strukturen. Den vesentlige egenskapen ved slike instanser er at alle har et første element og en suksessorfunksjon som tilfredsstiller induksjonshypotesen.[25] Modeller for aritmetikk, systemer, beskriver ikke objekter - tall og deres egenskaper, slik en kanskje skulle tro, men plasser, eller posisjoner i en struktur. Det er disse posisjonene i naturlig-tall-strukturen som blir identifisert med de naturlige tallene, ikke objektene som i et system kan oppta disse posisjonene. Spørsmålet 'er tre medlem av fire?' er da en *kategorifeil* siden medlemskap

[25]Om en skal kreve at induksjonshypotesen formuleres i første eller andre ordens logikk er da et naturlig spørsmål å stille seg. Vi skal senere se at første ordens logikk ikke kan beskrive, opp til isomorfi, de naturlige tallene, mens andre ordens logikk kan dette.

er en egenskap som tilhører mengdelære, og dermed mengdelære-strukturen, mens tre og fire hører til naturlig-tall-strukturen. Objektet $0^{\mathfrak{N}}$ og $0^{\mathfrak{P}_2}$ spiller altså rollen til tallet 0, men ingen av dem *er* tallet 0, som altså ikke er annet enn den første posisjonen i naturlig-tall-strukturen. Egenskapene til objektene i et system kan gjerne variere, slik de gjør i $\mathfrak{N}$ og $\mathfrak{P}_2$, så lenge de begge er instanser av samme struktur.

En skiller mellom *ante rem* strukturalisme, og *in re* strukturalisme. Posisjonen over tar begrepet 'struktur' som et ikke-reduserbart begrep. Strukturer er abstrakte entiteter, og ville, som Platons idéer ikke slutte å være dersom ingen systemer eksisterte. Stewart Shapiro er den mest kjente forkjemperen for en slik ante rem strukturalisme. Hvis en har kvaler med slike abstrakte entiteter finnes det et alternativ, nemlig *in re* strukturalisme som det også gis to versjoner av - en rent ekstensjonell, og en modal. Hovedidéen er å finne noe konkret som en kan identifisere med tallene. Hartry Fields forslag, i sitt forsøk på å nominalistisk redusere newtonsk mekanikk, er å anse det newtonske rommet som et konkret objekt. Siden det finnes like mange regioner, biter av det newtonske rommet, som det finnes delmengder av reelle tall, kan en nominalistisk redusere tall til regioner. Hvis en nå gjør en strukturalistisk vri på dette, men benekter at strukturer har væren utover de systemene som instansierer strukturen ender en med en aristoteliskSmakende in rem strukturalisme.[26]

En ante-remist hevder altså at tall er genuine objekter, nemlig plassene i naturlig-tall-strukturen, mens en ekstensjonell in-reist er reduksjonist i det at tall er skjulte kvantoruttrykk. Utsagn som '2+3 = 5' er ikke *om* objektene hvis navn er '2', '3' og '5'. Slike utsagn er heller generaliseringer over ethvert naturlig-tall-*system*. '2+3 = 5' betyr da noe slikt som 'for ethvert naturlig-tall-system, så er objektet på andre plass addert til objektet på tredje plass lik objektet på femte plass'. Hvis vi betegner plassene i et tilfeldig naturlig-tall-system for $p_0, p_1, \dots$, så får vi altså at

$$\text{`}2+3=5\text{'} \quad \text{betyr} \quad \forall\mathfrak{A}[\mathfrak{A} \cong \mathfrak{N} \Rightarrow p_2^{\mathfrak{A}} +^{\mathfrak{A}} p_3^{\mathfrak{A}} = p_5^{\mathfrak{A}}].$$

En modal in-reist kvalifiserer kun utsagnet over med 'for ethvert *mulig* naturlig-tall-system . . . '. Problemet for in-reisten er å garantere at det finnes nok prokuristobjekter i hans ontologien slik at matematiske utsagn ikke blir tomt sanne. Dersom det f.eks. bare finnes endelig mange objekter i verden, evt. enhver mulig verden har kun endelig mange objekter, da finnes det ikke nok objekter til å fylle alle plassene i et naturlig-tall-system, og dermed finnes det ingen naturlig-tall-system. Dermed er både '$2+3=5$' og '$2+3 \neq 5$' trivielt sanne. Enkelte matematiske teorier krever uante mengder av objekter. . . .

Vi lar filosofene ta over stafettpinnen her. Vi skal videre langs modellteoriens smale sti.

[26]Field selv regner seg ikke som strukturalist, men klassifiseres så av strukturalistene.

11 Löwenheim-Skolem teoremene

Etter noen relativt lette avsnitt, er det nå på tide med noe litt mer utfordrende. Vi skal i dette avsnittet se på to nye definisjoner - *substruktur*, og *elementær substruktur*. Dette er definisjoner som vi trenger for å sammenligne modeller utover isomorfi og elementær ekvivalens. Målet er å bevise nedover versjonen av Löwenheim-Skolem teoremet og noen avarter av teoremet. Beviset er ganske langt og forholdsvis vanskelig, men det er også ganske vakkert når en bare først klarer å overse alle knotete detaljer og skuer teoremets rene essens.

11.1 Substrukturer og elementære substrukturer

Substruktur. Hvis $\mathfrak{A}$ og $\mathfrak{B}$ er $\mathcal{L}$-strukturer sier vi at $\mathfrak{A}$ er en *substruktur* av $\mathfrak{B}$ og skriver $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ dersom:

1. $A \subseteq B$.
2. $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$ for alle konstantsymboler c.
3. $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^n$ for alle n-ære relasjonssymboler R.
4. $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} \restriction_{A^n}$ for alle n-ære funksjonssymboler f. $f^{\mathfrak{B}} \restriction_{A^n}$ kalles restriksjonen av $f^{\mathfrak{B}}$ til A^n.

Merk her at en substruktur av $\mathfrak{B}$ er bestemt av sitt univers, og dette universet kan være enhver delmengde av B som er lukket under enhver funksjon. La oss illustrere nødvendigheten av lukkethet-egenskapen med et eksempel.

Siden det andre aksiomet til N er '$\forall x \forall y[Sx = Sy \to x = y]$', som altså krever at S er en injektiv funksjon, og numeralet 0 må tolkes likt i begge strukturene, ser en at $\mathfrak{N}$ ikke kan ha substruktur $\mathfrak{M}$ slik at $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$. Anta at $M = \{0\}$. Siden $0^{\mathfrak{B}} \in M$, og $S^{\mathfrak{N}} \restriction_M (0) = 1$ må $S^{\mathfrak{M}}(0) = 1$, og dermed må $1 \in M$. Anta da heller at $M = \{0, 1\}$. Da har vi at siden $S^{\mathfrak{N}} \restriction_M (1) = 2$ er $S^{\mathfrak{M}}(1) = 2$, og dermed må $2 \in M$. Ved iterere denne prosedyren ender en opp med at $M = \mathbb{N}$.

Hvis en derimot lar $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, 0, < \rangle$, og lar $\mathfrak{B}$ være $\langle \{0\}, 0, < \rangle$ vil $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. Merk at $\mathfrak{A} \vDash \forall x \exists y[x < y]$, mens $\mathfrak{B} \nvDash \forall x \exists y[x < y]$, og $\mathfrak{A} \nvDash \exists x \forall y[x = y]$, mens $\mathfrak{B} \vDash \exists x \forall y[x = y]$. Dette viser at substruktur-relasjonen ikke relaterer sannhet i modeller; $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \not\Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Vi er på jakt etter en struktur-relasjon som relaterer sannhet i den ene modellen til sannhet i den andre. Svaret er *elementær substruktur*.

Elementær Substruktur. Dersom $\mathfrak{A}$ og $\mathfrak{B}$ er to $\mathcal{L}$-strukturer slik at $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ og for alle tilordningsfunksjoner $s : Vars \to A$, og for alle $\mathcal{L}$-formler ϕ:

$$\mathfrak{A} \vDash \phi[s] \iff \mathfrak{B} \vDash \phi[s]$$

sier vi at $\mathfrak{A}$ er en *elementær substruktur* av $\mathfrak{B}$, og skriver $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$

Tilstrekkelighet ved $\prec$ -bevis 1. Hvis en vet at $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, og vil bevise at $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, er det tilstrekkelig å vise at $\forall s : Vars \to A$, $\mathfrak{A} \models \phi[s] \Rightarrow \mathfrak{B} \models \phi[s]$.

Bevis. Anta at $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Vi viser at det alltid er tilfellet at for alle $s : Vars \to A$, og for alle $\mathcal{L}$-formler ϕ, $\mathfrak{B} \models \phi[s] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \phi[s]$.

Siden $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, så tolker $\mathfrak{B}$ alle konstanter, funksjoner og relasjoner likt som $\mathfrak{A}$ så lenge vi holder oss innenfor A. Siden tilordningsfunksjonene har kodomene A, er vi garantert at alle åpne formler blir tolket likt i $\mathfrak{A}$ som i $\mathfrak{B}$ under enhver $s : Vars \to A$. Vi har dermed vist at påstanden holder for alle atomære formler. Anta nå som induksjonshypotese, IH, at påstandene

$$\mathfrak{B} \models \alpha[s] \iff \mathfrak{A} \models \alpha[s]$$

$$\mathfrak{B} \models \beta[s] \iff \mathfrak{A} \models \beta[s]$$

holder.

Vi må vise at det følgende alltid holder:

1. $\mathfrak{B} \models \neg\alpha[s] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \neg\alpha[s]$.
2. $\mathfrak{B} \models \alpha \vee \beta[s] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \alpha \vee \beta[s]$.
3. $\mathfrak{B} \models \forall x\alpha[s] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \forall x\alpha[s]$.

Vi lar vår fiktive leser gjøre første og andre punkt og viser kun punkt 3.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B} \models \forall x\phi[s] &\iff \text{for alle } b \in B, \mathfrak{B} \models \phi[s[x|b]] \\
&\overset{A\subseteq B}{\Longrightarrow} \text{for alle } b \in A, \mathfrak{B} \models \phi[s[x|b]] \\
&\overset{IH}{\iff} \text{for alle } b \in A, \mathfrak{A} \models \phi[s[x|b]] \\
&\iff \mathfrak{A} \models \forall x\phi[s]
\end{aligned}$$

□

Tilstrekkelighet ved $\prec$ -bevis 2: Tarski-Vaught testen. Anta at $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Da er $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ hviss for enhver formel α, og alle $s : Vars \to A$ slik at $\mathfrak{B} \models \exists x\alpha[s]$ så finnes det en $a \in A$ slik at $\mathfrak{B} \models \alpha[s[x|a]]$.[27]

Bevis.
$\Longrightarrow$
Anta først at $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. Da har vi ved definisjon at for alle $s : Vars \to A$, og for alle $\mathcal{L}$-formler α, $\mathfrak{A} \models \alpha[s] \iff \mathfrak{B} \models \alpha[s]$. Dersom da $\mathfrak{B} \models \exists x\alpha[s]$, da vet vi at $\mathfrak{A} \models \exists x\alpha[s]$, og ved oppfyllbarhet følger det da at $\mathfrak{A} \models \alpha[s[x|a]]$ for en $a \in A$. Siden $s[x|a]$ er en tilordningsfunksjon med kodomene A, følger det igjen fra definisjonen av '$\prec$' at $\mathfrak{B} \models \alpha[s[x|a]]$.

[27]Dette svarer til teorem 1.10 i [19]

$\Longleftarrow$

Anta nå at for enhver formel α, og alle $s : Vars \to A$ slik at $\mathfrak{B} \models \exists x\alpha[s]$ så finnes det en $a \in A$ slik at $\mathfrak{B} \models \alpha[s[x|a]]$. Vi skal, ved å gjøre induksjon på formelkompleksitet, vise at $\forall s : Vars \to A, \mathfrak{A} \models \alpha[s] \iff \mathfrak{B} \models \alpha[s]$, og dermed at $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. Siden $\exists \equiv \neg\forall\neg$, bruker vi '$\exists$' i kvantorsteget.

Atomsteg:

La første α være en atomær formel, for eksempel '$R(x, y)$'. Da har vi at $\mathfrak{A} \models \alpha[s] \Leftrightarrow \langle s(x), s(y)\rangle \in R^{\mathfrak{A}}$. Siden $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, er $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^2$. Dermed har vi at $\langle s(x), s(y)\rangle \in R^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow \langle s(x), s(y)\rangle \in R^{\mathfrak{B}}$.

Induksjonshypotese:

$\forall s : Vars \to A, \mathfrak{A} \models \alpha[s] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \alpha[s]$.

Negasjonssteg:

La $\phi \equiv \neg\alpha$. Da har vi

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \phi[s] &\iff \mathfrak{A} \models \neg\alpha[s] \\
&\iff \mathfrak{A} \not\models \alpha[s] \\
&\iff \mathfrak{B} \not\models \alpha[s] \quad \text{Induksjonshyp.} \\
&\iff \mathfrak{B} \models \neg\alpha[s] \\
&\iff \mathfrak{B} \models \phi[s]
\end{aligned}$$

Disjunksjonssteg:

Overlates til leseren.

Kvantorsteg:

La $\phi \equiv \exists x\alpha$. Da har vi at

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \phi[s] &\iff \mathfrak{A} \models \exists x\alpha[s] \\
&\iff \mathfrak{A} \models \alpha[s[x|a]] \quad \text{For en } a \in A \\
&\Longrightarrow \mathfrak{B} \models \alpha[s[x|a]] \quad \text{Induksjonshyp.} \\
&\iff \mathfrak{B} \models \exists x\alpha[s] \\
&\iff \mathfrak{B} \models \phi[s]
\end{aligned}$$

samt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B} \models \phi[s] &\iff \mathfrak{B} \models \exists x\alpha[s] \\
&\Longrightarrow \mathfrak{B} \models \alpha[s[x|a]] \quad \text{For en } a \in A \text{ - Antagelse} \\
&\iff \mathfrak{A} \models \alpha[s[x|a]] \quad \text{Induksjonshyp.} \\
&\iff \mathfrak{A} \models \exists x\alpha[s] \\
&\iff \mathfrak{A} \models \phi[s]
\end{aligned}$$

Dermed har vi altså $\mathfrak{A} \vDash \phi[s] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \phi[s]$, som var siste etappe i beviset.

Dermed gjelder det for enhver formel α og enhver tilordningsfunksjon $s : Vars \rightarrow A$ at $\mathfrak{A} \vDash \alpha[s] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \alpha[s]$, og dermed er $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, quod erat demonstrandum.

□

Like tilordningsfunksjoner. Dersom to tilordningsfunksjoner s og s' er like mht. frie variabler i α, da er $\mathfrak{A} \vDash \alpha[s] \iff \mathfrak{A} \vDash \alpha[s']$.

Bevis. Gjør induksjon på formelkompleksitet. □

11.2 Oppsummerende om relasjoner mellom modeller

Vi har nå sett at to modeller $\mathfrak{A}$ og $\mathfrak{B}$ kan være relatert til hverandre på fire måter, nemlig $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}, \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}, \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, og $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. Hva er så implikasjonsrelasjonene mellom disse modellrelasjonene? Vi har nyss sett at $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \not\Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. La nå $\mathfrak{A}$ være en ikke-standard modell for aritmetikk. Da er $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{N}$, $\mathfrak{A} \not\subseteq \mathfrak{N}$ og $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{A}$ samt $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{A}$. Videre har vi for enhver $\mathfrak{B}$ og $\mathfrak{C}$ at $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C}$, og at '$\equiv$', og '$\cong$' er ekvivalensrelasjoner, men $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C} \not\Rightarrow \mathfrak{B} \cong \mathfrak{C}$. Generelt er det slik $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C}$ ikke nødevendigvis impliserer noen delmengderelasjon mellom B og C, så dermed følger det at $\mathfrak{B}$ og $\mathfrak{C}$ ikke trenger være verken '$\subseteq$' eller '$\prec$' relatert. '$\equiv$' relaterer kun sannhet mellom modellen, og ikke deres 'struktur'. '$\cong$' sier at den "indre strukturen" til den ene modellen er identisk med den andre, modellene er bilder av hverandre, så sannhet blir her med på lasset. '$\subseteq$' sier at modellene er like hvis en bare begrenser seg til det minste universet, og '$\prec$' relaterer sannhet ved å begrense tolkningene alle frie variabler til det minste domenet. Generelt så har vi at $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ siden vi med overlegg definerte '$\equiv$' for *setninger*. Videre har vi at '$\prec$' er en refleksiv, antisymmetrisk og transitiv relasjon. '$\prec$' er mao. en sløv partiell ordning av mengden av alle modeller for et språk.

11.3 Löwenheim-Skolem teoremene

Löwenheim-Skolem - Nedover. Anta at $\mathcal{L}$ er et tellbart språk, og $\mathfrak{B}$ er en $\mathcal{L}$-modell. Da har $\mathfrak{B}$ en tellbar elementær substruktur.[28]

[28] En kan generalisere dette teoremet til: Anta at $|\mathcal{L}| \leq \kappa$, der κ er et uendelig kardinaltall og $\mathfrak{B}$ er en $\mathcal{L}$-modell. Da finnes det en modell $\mathfrak{A}$ slik at $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ og $|A| \leq \kappa$. Beviset under kan lett omgjøres til et bevis for det generelle tilfellet. Vi trenger utvalgsaksiomet for å bevise nedoverversjonen av L-S. Vi plukker ut et element $a_{\alpha,s'}$ for hver formel ϕ og hver tilordningsfunksjon s. En kan se på $a_{\alpha,s'}$ som en funksjon av α og s. Dette kalles en *skolemfunksjon*, og eksistensen av en skolemfunksjon for hver α og hver s, er ekvivalent med utvalgsaksiomet, som altså er en fra mengdelære hverken bevisbar eller refuserbar setning.

Bevis. Siden $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}$ holder for enhver $\mathfrak{A}$, har vi at dersom $\mathfrak{B}$ er tellbar (har et tellbart univers), da er $\mathfrak{B}$ sin egen tellbare substruktur, så anta at $\mathfrak{B}$ ikke er tellbar.

Siden $\mathcal{L}$ er antatt tellbart, finnes det bare tellbart mange formler. La A_0 være tellbar ikke-tom delmengde av B. Vi skal gradvis utvide A_0, slik at $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$. Til slutt vil $A = \bigcup_{i<\infty} A_i$ være det tellbart uendelige universet til vår etterlengtede substruktur $\mathfrak{A}$. La

$$S_0' = \{s' : Vars \to A_0 \mid \exists n \geq 0\ \forall m \geq n[s'(x_n) = s'(s_m)]\}$$

$$S_0 = \{s \mid s : Vars \to A_0\}$$

S_0' er mengden av alle *omsider konstante* tilordningsfunksjoner inn i A_0. Generelt er det slik at det finnes $|B|^{|A|}$ funksjoner fra A til B, så det finnes $\aleph_0^{\aleph_0}$ tilordningsfunksjoner inn i A_0, men kun $\aleph_0$ omsider konstante tilordningsfunksjoner.[29]

Siden alle formler ϕ har endelig lengde, og dermed inneholder kun endelig mange frie variabler, kan vi for hver tilordningsfunksjon $s : Vars \to A_0$ finne en omsider konstant tilordningsfunksjon s' slik at s og s' er like mht. alle frie variabler i ϕ. Dermed har vi fra lemmaet over at $\mathfrak{B} \models \phi[s] \iff \mathfrak{B} \models \phi[s']$.

Hvordan så konstruere A_1? For enhver formel α, og enhver $s : Vars \to A_0$ slik at $\mathfrak{B} \models \exists x\alpha[s]$, finn en omsider konstant $s' : Vars \to A_0$ som er lik s mht. frie variabler i $\exists x\alpha$. Velg et element $a_{\alpha,s'} \in B$ slik at $\mathfrak{B} \models \alpha[s[x|a_{\alpha,s'}]]$, og la

$$A_1 = A_0 \cup \{a_{\alpha,s'}\}_{\forall\alpha\forall s:Vars\to A_0}$$

Siden det kun finnes tellbart mange formler α og kun tellbart mange funksjoner $s' : Vars \to A_0$, kan vi ikke ha lagt til mer enn tellbart mange nye elementer ved konstruksjonen av A_1. Siden unionen av to tellbare mengder, selv er tellbar, følger det at A_1 er en tellbar mengde. Ved itererende gjenta prosedyren over bygges en A_{n+1} fra A_n. La så $A = \bigcup_{i<\infty} A_i$. A er da en tellbar union av tellbare mengder, og er derfor selv tellbar.

Vi har nå to ting igjen gjøre. Først må vi, i lys av bemerkningen etter definisjonen av en substruktur, vise at A er lukket under enhver funksjon. Etterpå må vi vise at $\mathfrak{A}$ tilfredsstiller Tarski-Vaught testen.

Lukket under funksjoner:

Anta at $f \in \mathcal{L}$ er et unært funksjonssymbol (det generelle n-re tilfelle er likt, men mer syntaktisk brysomt), $a \in A$, og $f^{\mathfrak{A}}(a) = b \in B$. Vi må vise

[29]Litt kardinalaritmetikk: La oss betrakte to mengder; A og B. Dersom $A \cap B = \emptyset$ da er $|A \cup B| = |A| + |B|$. Hvis vi ikke vet om $A \cap B = \emptyset$, da kan vi kun slutte at $|A \cup B| \leq |A| + |B|$. Dersom κ er et uendelig kardinaltall, da er $\kappa^n = \kappa$ for ethvert naturlig tall n, og dersom $\lambda \leq \kappa$ da er $\lambda + \kappa = \kappa$.

Vi viser nå at det finne kun κ omsider konstante tilordningsfunksjoner inn i en uendelig mengde med kardinalitet κ. La S_i' være mengden av alle fra og med variabel v_i konstante tilordningsfunksjoner. Vi har da at mengden av alle omsider konstante tilordningsfunksjoner $S' = \bigcup_{i<\infty} S_i'$. Dermed er $|S'| \leq \sum_{i<\infty} |S_i| = \sum_{i<\infty} \kappa^i = \kappa$.

at $b \in A$. La n være et så stort tall at $a \in A_n$. La $\phi \equiv \exists y(y = f(x))$, og la s være en tilordningsfunksjon inn i A slik at $s(x) = a$. Vi har altså at $\mathfrak{B} \models \exists y(y = f(x))[s]$, og dersom $\mathfrak{B} \models y = f(x)[s[y|d]]$, så er $b = d$ (f er en funksjon!). Men siden ϕ er på formen $\exists y \ldots$, må vi i vår konstruksjon av A_{n+1} ha funnet et element $a_{y=f(x),s} = b$, så $b \in A_{n+1} \subseteq A$.

Tilfredsstiller 'Tilstrekkelighet ved $\prec$ -bevis 2':

Vi skal nå vise at for enhver formel α og alle $s : Vars \to A$ slik at $\mathfrak{B} \models \exists x\alpha[s]$, så finnes det en $a \in A$, slik at $\mathfrak{B} \models \alpha[s[x|a]]$. La derfor α og s oppfylle disse to betingelsene. Finn en omsider konstant tilordningsfunksjon s' slik at s og s' er like mht. frie variabler i $\exists x\alpha$. Dermed er $\mathfrak{B} \models \exists x\alpha[s']$. Siden s' er omsider konstant, er kodomene (mengden av funksjonsverdiene) til s' endelig. La n være et så stort tall at $s'(x_i) \in A_n$ for alle variabler x_i. I vår konstruksjon av A_{n+1} har vi lagt til et element a slik at $\mathfrak{B} \models \alpha[s'[x|a]]$. Siden s og s' er like mht. frie variabler i $\exists x\alpha$, er også $[s[x|a]]$ og $[s'[x|a]]$ like mht frie variabler i α, og dermed er $\mathfrak{B} \models \alpha[s[x|a]]$. Dermed har vi vist at de nødvendige betingelsene i lemmaet 'Tilstrekkelighet ved $\prec$ -bevis 2' er oppfylt, og dermed er nedoverversjonen av Löwenheim-Skolem-teoremet bevist.

$\square$

Vi skal nå bevise tre mindre setninger om modell-uendelighet før vi beviser oppoverversjonen av Löwenheim-Skolem-teoremet.

κ-uendelige modeller 1. Anta at Σ er en mengde av $\mathcal{L}$-formler med en uendelig modell. For hvert kardinaltall $\kappa \geq \aleph_0$, finnes det en modell for Σ med kardinalitet $\geq \kappa$.

Bevis. Dette er en applikasjon av kompakthet. Utvid $\mathcal{L}$ med κ nye konstanter c_i, og la $\Gamma = \Sigma \cup \{c_i \neq c_j\}$. Siden Σ har en modell, har, ved kompakthet, også enhver endelig delmengde av Σ en modell. Dermed har enhver endelig delmengde av Γ også en modell (en endelig delmengde av Γ inneholder kun endelig mange formler $c_i \neq c_j$), og dermed, via kompakthet igjen, har også Γ en modell $\mathfrak{A}'$. La $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \restriction_{\mathcal{L}}$. Da er $\mathfrak{A}$ en $\mathcal{L}$-modell for Σ med kardinalitet $\geq \kappa$. $\square$

κ-uendelige modeller 2. La $\mathcal{L}$ være et tellbart språk og Σ en mengde $\mathcal{L}$-formler. Dersom Σ har en uendelig modell $\mathfrak{A}$, så finnes det for hvert kardinaltall $\kappa \geq \aleph_0$ en modell $\mathfrak{B}$ for Σ med kardinalitet lik κ.

Bevis. Ved lemmaet 'κ-uendelige modeller 1', finnes den for hver $\kappa \geq \aleph_0$ en $\mathfrak{B} \models \Sigma$ med kardinalitet $\geq \kappa$. Vi må vise at det finnes en med kardinalitet *lik* κ.

Ved å modifisere Löwenheim-Skolem konstruksjonen av A, der en starter med $A_0 \subseteq B$ med κ elementer i A_0, og så å utvide A_0 til A_1 med maks κ nye elementer vil en få en modell $\mathfrak{A}$ med akkurat κ elementer, og $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. $\square$

Uendelige modeller lar seg ikke karakterisere. Dersom $\mathfrak{A}$ er en uendelig $\mathcal{L}$-struktur, da finnes det ingen mengder av første ordens formler som karakteriserer $\mathfrak{A}$ opp til isomorfisme.

I symboler:

$$|A| \geq \aleph_0 \Rightarrow \forall \Sigma \big[\mathfrak{A} \vDash \Sigma \Rightarrow \exists \mathfrak{B} [\mathfrak{B} \vDash \Sigma \wedge \mathfrak{A} \ncong \mathfrak{B}] \big]$$

Bevis. Vi vet at to modeller med forskjellig uendelig kardinalitet ikke kan være isomorfe siden det ikke finnes noen bijeksjon mellom slike mengder. Vi vet ogs fra lemmaene over at det finnes modeller av enhver kardinalitet, s enhver mengde formler Σ som pretenderer å karakterisere $\mathfrak{A}$ vil også ha modeller med forskjellig kardinalitet fra $\mathfrak{A}$. □

Inkorporering. En *inkorporering*, 'embedding' på engelsk, er helt lik en isomorfi, med det unntaket at en inkorporering kun trenger å være injektiv. Dersom $j : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ er en inkorporering, skriver vi '$\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$'. En surjektiv inkorporering er altså en isomorfi.

Elementær inkorporering. Dersom $\mathfrak{A}$ og $\mathfrak{B}$ er to $\mathcal{L}$-strukturer, da er en inkorporering $j : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *elementær* dersom for alle $\mathcal{L}$-formler ϕ og alle $s : Vars \to A$

$$\mathfrak{A} \vDash \phi[s] \iff \mathfrak{B} \vDash \phi[js]$$

og vi skriver $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{B}$.[30]

Litt folkelig kunne en si at det finnes et bilde av $\mathfrak{A}$ inne i $\mathfrak{B}$ dersom $\mathfrak{B}$ elementært inkorporerer $\mathfrak{A}$. Vi skal vise at innholdet i begrepene 'elementær substruktur' og 'elemenær inkorporering' er ganske like, men dog, forskjellige er de siden $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{B} \not\Rightarrow \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, ja faktisk er det slik at $\precsim + \subseteq = \prec$. Vi lar leseren selv prøve å overbevise seg selv om dette. Utover gleden av å innføre et nytt tegn for en ny relasjon, er inkorporeringsdigresjonen begått for å forenkle beviset for oppoverversjonen av Löwenheim-Skolem teoremet.

Elementær inkorporering vs. elementær substruktur.
$\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{B}$ hviss det finnes en modell $\mathfrak{C}$ slik at $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{C}$ og $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$.

[30]Innføringen av tegnene '$\simeq$' og '$\precsim$' er av egen oppfinnelse. Ofte bruker en ikke tilordningsfunksjoner i definisjonen av elementær inkorporering. I stedet lar en '$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$' betegne at de frie variablene i formelen er blant $x_{i \leq n}$. En definerer så: for enhver sekvens av objekter $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ fra A

$$\mathfrak{A} \vDash \phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) \iff \mathfrak{B} \vDash \phi(ja_1, ja_2, \ldots, ja_n)$$

Siden en tilordningsfunksjon kan sees på som en uendelig slik sekvens av objekter, er det lite forskjell utover notasjonen.

Bevis. Siden isomorfi er en ekvivalensrelasjon har vi at $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}$ for enhver modell $\mathfrak{B}$. Dersom $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ er det trivielt at $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{B}$ ved å la den elementære inkorporeringsfunksjonen $j : A \to B$ være identitetsfunksjonen.

Anta nå at $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{B}$, der j er en elementær inkorporering. Vi skal bevise at det finnes en $\mathfrak{C}$ slik at $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{C}$ og $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$. Dette er et langt bevis, så vi deler det opp i tre deler. Først (1) skal vi bevise at det finnes en $\mathfrak{C}$ isomorf med $\mathfrak{B}$, siden (2) skal vi vise at $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$ og sist (3) viser vi at $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$.

(1) Påstand: Det finnes en $\mathfrak{C}$ slik at $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{B}$.

Bevis. Vi definerer en bijektiv funksjon $i : B \to C$ ved

$$i(b) = \begin{cases} a & \text{hvis } j(a) = b \\ b & \text{ellers} \end{cases}$$

At denne funksjonen er bijektiv ser en ved å først betrakte $j[A]$, altså mengden av alle funksjonsverdiene til j. Siden j er en injektiv funksjon, er $j : A \to j[A]$ en bijektiv funksjon. Videre er $i : B \setminus j[A] \to B \setminus j[A]$ en identitetsfunksjon. Hele funksjonen i er bare unionen av disse to bijektive funksjonene, og er dermed selv bijektiv.

Vi definerer nå relasjoner og funksjoner på $\mathfrak{C}$ ved å først la alle n-ære relasjonssymbol $R \in \mathcal{L}$,

$$\langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle \in R^{\mathfrak{B}} \iff \langle ib_1, ib_2, \ldots, ib_n \rangle \in R^{\mathfrak{C}}$$

og så for alle n-ære funksjonssymbol $f \in \mathcal{L}$ la

$$f^{\mathfrak{B}}(b) = f^{\mathfrak{C}}(ib)$$

Vi lar alle konstanter c i språket trivielt bli tolket likt i $\mathfrak{B}$ som i $\mathfrak{C}$. Det burde dermed være mulig å innse at i er en isomorfisme, og dermed at $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{C}$.

$\square$

(2) Påstand: $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$.

Bevis. Denne delen har også tre deler, nemlig

(*a*) $A \subseteq C$

(b) $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{C}} \cap A$

(c) $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{C}} \restriction_A$

(a) Siden j er injektiv finnes det for hver $b \in j[A]$ en og bare en $a \in A$ slik at $j(a) = b$. Siden $j[A] \subseteq B$ har vi at $i[j[A]] \subseteq C$. Vi må vise at $i[j[A]] = A$. Siden j er en injeksjon $j : A \to B$, er den en bijeksjon $j : A \to j[A]$. Dermed følger det fra definisjonen av i at $i[j[A]] = A$.

(b) $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{C}} \cap A$ er ekvivalent med at $R^{\mathfrak{A}} \subseteq R^{\mathfrak{C}}$. Vi gjør beviset for et binært relasjonssymbol R. Anta derfor at $\langle a, b\rangle \in R^{\mathfrak{A}}$ for $a, b \in A$. Vi må vise at $\langle a, b\rangle \in R^{\mathfrak{C}}$. La $s : Vars \to A$. Da har vi følgende

$$\begin{aligned} \langle a, b\rangle \in R^{\mathfrak{A}} &\iff \mathfrak{A} \models Rxy[s[x|a][y|b]] \\ &\iff \mathfrak{B} \models Rxy[s[x|j(a)][y|j(b)]] \\ &\iff \mathfrak{C} \models Rxy[s[x|i(j(a))][y|i(j(b))]] \\ &\iff \mathfrak{C} \models Rxy[s[x|a][y|b]] \end{aligned}$$

Den siste ekvivalensen siden $i(j(a)) = a$ for alle $a \in A$. Dermed er $\langle a, b\rangle \in R^{\mathfrak{C}}$ som var det vi skulle vise.

(c) Påstand: $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{C}} \restriction_A$

At $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{C}} \restriction_A$ er det samme som at $f^{\mathfrak{A}}(a) = f^{\mathfrak{C}}(a)$ for alle $a \in A$. Beviset er det samme som for relasjoner.

$\square$

(3) Påstand: $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$.

Bevis. $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$ er tilfellet dersom for alle $s : Vars \to A$ og alle formler ϕ,

$$\mathfrak{A} \models \phi[s] \iff \mathfrak{C} \models \phi[s]$$

Ved lemmaet 'Tilstrekkelighet ved $\prec$-bevis 1' har vi at det er tilstrekkelig å vise

$$\mathfrak{A} \models \phi[s] \Rightarrow \mathfrak{C} \models \phi[s]$$

Anta derfor at ϕ og s er slik at $\mathfrak{A} \models \phi[s]$. Siden $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{B}$ har vi at $\mathfrak{B} \models \phi[js]$. Siden $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{C}$, og $i(j(s)) = s$ har vi at $\mathfrak{C} \models \phi[ijs]$, og dermed $\mathfrak{C} \models \phi[s]$, som var det vi skulle bevise. $\square$

Dermed finnes det en modell $\mathfrak{C}$ slik at $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{B}$ og $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$. $\square$

Det er verdt å merke seg denne typen 'oversettelse' mellom modeller. Modellen $\mathfrak{C}$ er en hybridmodell i den forstand at den inneholder objekter fra både $\mathfrak{A}$ og $\mathfrak{B}$. Vi har oversatt nok objekter fra B til objekter i A, og de resterende objektene i B blir uforandret med inn i C. Dersom A er en mengde tall, og B er en mengde strenger, er altså C en mengde av tall og strenger.

Dersom $\mathfrak{A}$ er en $\mathcal{L}$-modell, lar vi $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}} = \mathcal{L} \cup \{\overline{a} \mid a \in A\}$ der $\overline{a}$ er nye konstanter. $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ inneholder altså minst ett konstantsymbol for hvert element i $\mathfrak{A}$. Vi lar $\overline{\mathfrak{A}}$ være helt lik $\mathfrak{A}$ bortsett fra at $\overline{\mathfrak{A}}$ også tolker alle de nye konstantsymbolene $\overline{a}^{\overline{\mathfrak{A}}} = a$.

Diagram. Det komplette diagrammet til $\mathfrak{A}$ er

$$Th(\overline{\mathfrak{A}}) = \{\sigma \mid \sigma \text{ er en } \mathcal{L}_{\mathfrak{A}}\text{-formel, og } \overline{\mathfrak{A}} \models \sigma\}$$

Modell for diagram. Dersom $\overline{\mathfrak{B}} \models Th(\overline{\mathfrak{A}})$, og $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{B}} \restriction_{\mathcal{L}}$, da er $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{B}$.

Bevis. La $j : A \to B$ være definert ved $j(\overline{a}^{\overline{\mathfrak{A}}}) = \overline{a}^{\overline{\mathfrak{B}}}$. La nå $a, b \in A$ og $a \neq b$. Da er $\overline{a} \neq \overline{b} \in Th(\overline{\mathfrak{A}})$, og følgelig $\overline{\mathfrak{B}} \models \overline{a} \neq \overline{b}$, og ved definisjon av j, $j(\overline{a}^{\overline{\mathfrak{A}}}) \neq j(\overline{b}^{\overline{\mathfrak{A}}})$, så j er injektiv.

Dersom $\langle \overline{a}_1^{\overline{\mathfrak{A}}}, \overline{a}_2^{\overline{\mathfrak{A}}}, \dots, \overline{a}_n^{\overline{\mathfrak{A}}} \rangle \in R^{\mathfrak{A}}$ er $R(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_n) \in Th(\overline{\mathfrak{A}})$, og dermed

$$\langle \overline{a}_1^{\overline{\mathfrak{B}}}, \overline{a}_2^{\overline{\mathfrak{B}}}, \dots, \overline{a}_n^{\overline{\mathfrak{B}}} \rangle = \langle j\overline{a}_1^{\overline{\mathfrak{A}}}, j\overline{a}_2^{\overline{\mathfrak{A}}}, \dots, j\overline{a}_n^{\overline{\mathfrak{A}}} \rangle \in R^{\mathfrak{B}}$$

og likeens for funksjoner, så j er en inkorporering, og dermed $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$. Vi må vise at $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{B}$, altså at

$$\mathfrak{A} \models \phi[s] \iff \mathfrak{B} \models \phi[js]$$

Dette er nok et induksjonsargument. Det atomære tilfellet følger direkte fra definisjonen av en inkorporering. Vi lar leseren gjøre negasjons- og disjunksjonssteget. Vi gjør kvantorsteget for '$\exists$'. Anta som induksjonshypotese at

$$\mathfrak{A} \models \phi(x)[s] \iff \mathfrak{B} \models \phi(x)[js]$$

La oss anta at $s(x) = a$ for et eller annet objekt $a \in A$. Dermed har vi trivielt at $s = s[x|a]$, så

$$\mathfrak{A} \models \phi(x)[s[x|a]] \iff \mathfrak{B} \models \phi(x)[js[x|ja]]$$

som er ekvivalent med at

$$\mathfrak{A} \models \exists x\phi(x)[s] \iff \mathfrak{B} \models \exists x\phi(x)[js]$$

□

Löwenheim-Skolem - Oppover. La $|\mathcal{L}| \leq \kappa$ og $\mathfrak{A}$ være en uendelig $\mathcal{L}$-modell. Da har $\mathfrak{A}$ en elementær ekstensjon, $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, slik at $\kappa \leq |B|$.[31]

Bevis. Ved 'κ-uendelige modeller 1' har enhver mengde Σ slik at $\mathfrak{A} \models \Sigma$ en modell $\mathfrak{B} \models \Sigma$ og $|B| \geq \kappa$. Hvis vi nå lar $\Sigma = Th(\overline{\mathfrak{A}})$ har vi da at $\overline{\mathfrak{B}} \models Th(\overline{\mathfrak{A}})$ for en eller annen modell $\overline{\mathfrak{B}}$ med kardinalitet $\geq \kappa$. Fra 'Modell for diagram' over har vi da at $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{B}$, som ved lemmaet 'Elementær inkorporering er ekvivalent med elementær substruktur' impliserer at det finnes en modell $\mathfrak{C}$ slik at $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{C}$ og $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$.

□

[31] Det later til at Löwenheim-Skolem teoremet, det egentlige, lød noe i nærheten av 'enhver oppfyllbar første ordens teori har en tellbar modell'. $\prec$-relasjonen synes å være innført av Tarski og Vaught i 1956 i artikkelen [19] 'Arithmetical extensions of relational systems'

11.4 Hvordan telle det utellbare - Skolems paradoks

Löwenheim-Skolem teoremene sier altså at første ordens logikk er ubrukelig til å skille mellom uendeligheter større enn kardinaliteten til språket en bruker. En kan alltid forsikre seg om at enhver modell for en teorien har *minst* κ elementer ved å legge til nok formler '$c_i \neq c_j$' - en trenger bare uhorvelig mange konstanter, men en kan ikke garantere at enhver modell har maksimum κ elementer.

Vi sa i seksjonen om mengdelære at følgende setninger var teoremer: Det finnes en tellbar mengde. Dersom en mengde a finnes, da finnes potensmengden til a. Dersom a er en tellbar uendelig mengde, da er potensmengden til a utellbar. Vi viste også hvordan noen av aksiomene for mengdelære kunne formaliseres i første ordens logikk med signaturen $\{\in\}$. Fra nedoverversjonen av Löwenheim-Skolem teoremet følger det at det finnes en tellbar modell for mengdelære. Dette er rar! En objekt-språk setning som sier at det finnes en utellbar mengde er sann i et tellbart univers. Noe må være galt.

Merk her at egenskapen 'tellbar' er et eksistensutsagn, og at termen 'eksistens' ikke trenger å bety det samme i en objektspråk-kontekst, som i en metaspråk-kontekst. At en mengde a er tellbar er *definert*: 'det finnes en injektiv funksjon $f : a \to \mathbb{N}$'. La nå $\mathfrak{A}$ være den infame tellbare modellen for mengdelære, og la $a \in A$ være en tellbar mengde. Ved Cantors argument er da $b = \mathcal{P}(a)$ utellbar. Men siden $\mathcal{P}(a)$ er en mengde, er også alle $c \subseteq \mathcal{P}(a)$ mengder, og derfor $c \in A$. Er A dermed både tellbar og utellbar? Ja og nei. A er utellbar i den forstand at det ikke finnes en injeksjon fra A til $\mathbb{N}_{\textit{representert i } \mathfrak{A}}$, altså den mengde som spiller rollen til $\mathbb{N}$ i $\mathfrak{A}$. 'Eksistens' er her 'i-$\mathfrak{A}$-eksistens'. A er tellbar i den forstand at det finnes en injeksjon fra A til $\mathbb{N}$, altså den "virkelige" mengden $\mathbb{N}$ (hva nå enn det betyr). Forskjellen er altså hva vi kvantifiserer over. Problemet er altså et kvantorproblem. En naturligspråk kvantor, antas å rekke over alle ting, mens en objektspråk kvantor bare rekker over objektene i domenet til en modell om gangen. Matematikere jubler over løsningen over, mens filosofer griner på nesen og roper at det er noe galt med semantikken, eller realismen. En støyende flokk! Sentralt i den filosofiske debatten står Putnams artikkel [16] *Models and Reality*.

11.5 Andre ordens logikk

Vi har sett at førsteordens logikk er sunn komplett. Vi kan altså bevise kun alt vi vil. Vi så at dette impliserte at første ordens logikk var kompakt, som igjen ledet til ikke-standard modeller og vilkårlig store modeller. Vi kan altså ikke beskrive de naturlige tallene ved hjelp av første ordens aksiomer. Vi skal nå kort se at andre ordens logikk har nok uttrykksevne til å kunne beskrive de naturlige tallene opp til isomorfi. Vi har så langt bare tillatt kvantifisering over en type objekter om gangen. Vi innfører nå andre ordens kvantorer og variabler, '$\forall X$', som kvantifiserer over hele potensmengden til universet til en modell. I modellen $\mathfrak{N}$ med $\mathbb{N}$ som domene, vil altså '$\forall X$' bety 'for enhver delmengde av $\mathbb{N}$'.

Ved å utvide definisjonen av en tilordningsfunksjon slik at disse får i oppgave å tilegne relasjoner i tillegg til elementer, får en modellteori for andre ordens logikk. Andre ordens semantikk er ellers helt lik første ordens semantikk. Dermed har vi at for ethvert n-ært relasjonspredikat 'X',

$$\mathfrak{A} \models \forall X \phi[s] \iff \mathfrak{A} \models \phi[s[X|P]] \text{ for alle } n\text{-ære relasjoner } P \subseteq A^n$$

Dette kalles standard semantikk for andre ordens logikk, og resulterer i at andre ordens logikk ikke er komplett. Det finnes altså ingen deduksjonssystem slik at $\Sigma \models \phi \Rightarrow \Sigma \vdash \phi$. Det finnes et alternativ til standard semantikk, nemlig generell semantikk, også kalt Henkinsemantikk etter Leon Henkin. Forskjellen er i essens at i Henkinsemantikk kan en bestemme hvilke delmengder av modellens univers en skal kvantifisere over - betydningene til kvantorene kan altså variere fra modell til modell. Modellen gis dermed ved en liste. Først mengden av alle objektene som alle første ordens kvantorene skal kvantifisere over, så et utvalg av alle delmengdene av første ordens objekter som unære andre ordens variabler skal variere over, så et utvalg av alle delmengder av par av første ordens objekter som de binære andreordens variablene skal variere over, osv. Andre ordens logikk er komplett mht. Henkinsemantikk.[32]

Vi kan uttrykke Leibiz' lov i andre ordens logikk, og dermed definere identitet:

$$\forall x \forall y (x = y \leftrightarrow \forall X (Xx \leftrightarrow Xy))$$

som åpenbart er en gyldig setning.

La oss se på språket $\mathcal{L}_{NT'} = \{0, S\}$, og la $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N} \restriction_{\mathcal{L}_{NT'}} = \langle \mathbb{N}, 0^{\mathfrak{N}}, S^{\mathfrak{N}} \rangle$, og aksiomene

(P1) $\forall x (0 \neq Sx)$

(P2) $\forall x \forall y (Sx = Sy \rightarrow x = y)$

(P3) $\forall X (X0 \land \forall x (Xx \rightarrow XSx) \rightarrow \forall x Xx)$

[32] Et eksempel på en henkinmodell: La '$\mathfrak{H}$' være navnet på en henkinmodell hvis grunnunivers er $\{a, b, c\}$. Vi bestemmer oss for at de unære andre ordens variablene skal variere over $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, og de binære andre ordens variablene skal variere over $\{\{\langle a, b\rangle\}, \{\langle a, a\rangle\}\}$. La oss si at $\mathfrak{H}$ er en modell for den tomme signatur, altså at det ikke finnes noen konstant-, relasjon-, eller predikatsymboler å tolke. Mao. er $\mathfrak{H} = \langle\{a, b, c\}, \{\{a\}, \{a, b\}\}, \{\{\langle a, b\rangle\}, \{\langle a, a\rangle\}\}\rangle$.Vi har da at $\mathfrak{H} \models \exists x \forall X[X(x) \land \forall Y \exists y (Y(x, y))]$, siden a er medlem av enhver unær relasjon bestem av $\mathfrak{H}$, og enhver binær relasjon bestemt av $\mathfrak{H}$ relaterer a til et annet objekt. Det er åpenbart at denne setningen ikke hadde vært tilfredsstilt dersom $\mathfrak{H}$ var en standard modell. En ser her at andre ordens logikk tolket i Henkinsemantikk er en form for et mangesortalt språk.

(P3) betyr altså i $\mathfrak{N}$ 'for enhver delmengde A av $\mathbb{N}$, dersom $0 \in A$, og for alle tall x, dersom $x \in A$ impliserer at $Sx \in A$, da er $A = \mathbb{N}$'.

Våre aksiomer, N, har ikke induksjon, men vi skal senere se at vi kan utvide N til PA, aksiomene for *Peano Aritmetikk*, ved å legge til et aksiom*skjema*: For enhver formel $\phi(x)$ så er

$$\big[\phi(0) \wedge \forall x[\phi(x) \to \phi(Sx)]\big] \to \forall x \phi(x)$$

et aksiom. Vi skal nå se at (P1)-(P3) er tilstrekkelig til å beskrive de naturlige tallene. Det følger da fra karakteriseringslemmaet over at første ordens induksjonsskjemaet ikke er ekvivalent med (P3).

La oss først gjenta hva 'isomorfi' betyr. Vi sier at to $\mathcal{L}$ strukturer, $\mathfrak{A}$ og $\mathfrak{B}$ er *isomorfe*, og skriver $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ dersom det finnes en bijeksjon $i : A \to B$ slik at for ethvert konstantsymbol c i $\mathcal{L}$, $i(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$, for ethvert n-ært funksjonssymbol f, og alle $a_1, \dots a_n \in A$, $i(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathfrak{B}}(i(a_1), \dots, i(a_n))$, og for ethvert n-ært relasjonssymbol R, $\langle a_1, \dots a_n \rangle \in R^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow \langle i(a_1), \dots, i(a_n) \rangle \in R^{\mathfrak{B}}$. Vi kaller i en *isomorfisme.*

Dedekinds teorem. Enhver modell som tilfredsstiller (P1)-(P3) er isomorf med $\mathfrak{N}'$.

Bevis. Anta at $\mathfrak{A} \models$ (P1)-(P3). Vi må finne en isomorfi i, slik at $i : \mathbb{N} \to A$ er en bijeksjon, og $i(0^{\mathfrak{N}'}) = 0^{\mathfrak{A}}$ og sist at $i(S^{\mathfrak{N}'}(n)) = S^{\mathfrak{A}}(i(n))$, for enhver $n \in \mathbb{N}$.

Vi definerer i rekursivt ved å la for enhver $n \in \mathbb{N}$

1. $i(0) = 0^{\mathfrak{A}}$
2. $i(n+1) = S^{\mathfrak{A}}(i(n))$

Alt vi nå trenger å gjøre er å vise at i er en bijeksjon fra $\mathbb{N}$ på A. Siden en funksjon er bijektiv hviss den er surjektiv og injektiv, deler vi beviset i to deler.

Surjektiv:

Siden $\mathfrak{A} \models (P3)$, kan vi gjøre induksjon. Vi viser at ethvert element i A er i kodomenet til i. Ved første punkt i definisjonen av i har vi at $0^{\mathfrak{A}}$ er i kodomenet til i. Anta derfor som induksjonshypotese at $a = i(n)$ er i kodomenet til i. Vi må vise at $S^{\mathfrak{A}}(a)$ også er i kodomenet til i. Fra definisjonsklausul 2 har vi at $i(n+1) = S^{\mathfrak{A}}(i(n)) = S^{\mathfrak{A}}(a)$. Dermed følger det ved svak induksjon at hele A er i kodomenet til i, og dermed er i surjektiv.

Injektiv:

Vi viser at i er injektiv ved å vise at

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m \Rightarrow i(n) \neq i(m)$$

holder ved svak induksjon på n.

Anta først at $n = 0$. La da $m \neq 0$, f.eks. $m = k + 1$. Da har vi at $i(m) = i(k+1) = S^{\mathfrak{A}}(i(k))$. Siden $\mathfrak{A} \vDash (P1)$ og $i(0) = 0^{\mathfrak{A}}$, må $i(0) \neq i(m)$ for alle $m \neq 0$.

Anta nå som induksjonshypotese at $\forall m, n \neq m \Rightarrow i(n) \neq i(m)$ for et eller annet tall n. Vi må vise at $\forall m, (n+1) \neq m \Rightarrow i(n+1) \neq i(m)$.

Anta derfor at $(n+1) \neq m$. Dersom $m = 0$, har vi at $i(n+1) \neq i(m) = 0^{\mathfrak{A}}$ av samme grunner som over. La nå $m = k + 1$ for et eller annet tall k. Da er $k \neq n$, og dermed ved induksjonshypotesen er $i(k) \neq i(n)$. Siden $S^{\mathfrak{A}}$ er injektiv, $\mathfrak{A} \vDash (P2)$, har vi at $S^{\mathfrak{A}}(i(k)) \neq S^{\mathfrak{A}}(i(n))$. Ved andre klausul i definisjonen av i har vi da at $i(m) = i(k+1) \neq i(n+1)$. Siden k var et tilfeldig tall følger det $\forall m, (n+1) \neq m \Rightarrow i(n+1) \neq i(m)$. Dermed følger det ved svak induksjon at

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m \Rightarrow i(n) \neq i(m)$$

som viser at i er injektiv.[33] $\square$

11.6 Kategorisitet

En mengde aksiomer, en teori som, opp til isomorfi, har kun en modell kalles *kategoriell.* Det følger fra Löwenheim-Skolem teoremene at det ikke finnes noen mengde første ordens aksiomer med en uendelig modell som også er kategoriell. Det vil si at enhver modell for en første ordens kategoriell teori er endelig. Dedekinds teorem viser at det finnes kategorielle andre ordens teorier med uendelige modeller. Mangelen på evne til beskrive strukturer løser seg altså iallfall delvis ved å gå fra første ordens logikk til andre ordens logikk. Det beklagelige er at det ikke finnes et adekvat deduksjonssystem for andre ordens logikk. Vi kan altså ikke formelt bevise alle logiske konsekvenser av en aksiommengde.

Videre studier i modellteori innfører et nytt begrep, κ-kategorisitet. En teori T er κ-kategoriell dersom

$$\forall \mathfrak{A} \forall \mathfrak{B} \Big[\big[\mathfrak{A} \vDash \Sigma \wedge \mathfrak{B} \vDash \Sigma \wedge |A| = |B| = \kappa \big] \Rightarrow \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Big]$$

Det finnes ω-kategorielle første ordens teorier.[34] Et eksempel er de fem aksiomene som vi kaller 'DO' over språket $\{<\}$:

1. $\forall x \forall y [x < y \vee x = y \vee y < x]$
2. $\forall x \forall y [x = y \rightarrow \neg x < y]$
3. $\forall x \forall y \forall z [(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z]$
4. $\forall x \forall y [x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y]$
5. $\forall x \exists y \exists z [(y < x \wedge x < z) \rightarrow x < z]$

[33]Dette teoremet, og beviset for det er hentet fra kap. 3, §7 i [3] *Mathematical Logic* av Ebbinghaus, Flum & Thomas.

[34]Ved definisjon er $\omega = \aleph_0$. En teori T er mao. ω-kategoriell dersom alle dens tellbart uendelige modeller er isomorfe.

$\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ er den eneste tellbare modellen, opp til isomorfi, for denne teorien. Teorien kalles en 'kompakt ordning', 'dense ordering' på engelsk, og er fullstendig i den forstand at for alle setninger ϕ enten $DO \vdash \phi$ eller $DO \vdash \neg\phi$.[35]

Det er lett å se at DO er fullstendig. Anta at $\mathfrak{A} \models DO$. Da er det enten slik at $\mathfrak{A} \models \phi$, eller $\mathfrak{A} \models \neg\phi$. La oss anta det første. Siden DO er ω-kategoriell, er enhver modell $\mathfrak{B} \models DO$ isomorf med $\mathfrak{A}$, og følgelig må $\mathfrak{B} \models \phi$. Dermed er enhver modell for DO også en modell for ϕ. Fra kompletthetsteoremet følger det da at $DO \vdash \phi$. Siden dette gjelder enhver setning ϕ har vi at $DO \vdash \phi$ eller $DO \vdash \neg\phi$ for enhver setning, og følgelig er DO fullstendig. Vi har nå bevist følgende teorem:

Enhver konsistent og ω-kategoriell teori er fullstendig.

Vi vet at N ikke er ω-konsistent - den har ikke-standard modeller, men er den fullstendig, evt. kan vi finne en utvidelse N^+ slik at $\mathfrak{N} \models N^+$ og N^+ er fullstendig?

12 Ufullstendige forarbeidelser 1

Vi har nå vært igjennom en en del modellteoretiske emner som følger fra sunnhet og kompletthet. Nå er tiden inne for å gjøre forarbeidet til høydepunktet i dette notatet - teoremene til Gödel, Turing og Tarski. Dette innebærer at vi skal bestemme oss hva ordene 'fullstendig', 'rekursiv', 'teori', 'representere' og 'definerbar' skal bety. På engelsk sier man at en logikk er 'complete' på samme måte som vi sier en logikk er komplett dersom en kan bevise alt som er sant. Det som er litt forvirrende er at de bruker 'incomplete' mht. Gödels teoremer. En beviser først kompletthet, og så 'ukompletthet'. På norsk bruker vi 'komplett' og 'ikke komplett' dersom en logikk hhv. kan eller ikke kan bevise alt som er sant, mens vi bruker 'fullstendig' og 'ufullstendig' i kontekst av Gödels ufullstendighetsteoremer. Betydningen til ordparene har ingenting med hverandre å gjøre.

Vi har så langt vært interessert i hva en kan bevise fra hvilke aksiomer, og sett at en kan bevise en setning ϕ fra N hviss enhver modell for N også være en modell for ϕ. Vi skal nå skifte fokus slik at vi kun er interessert i standardmodellen $\mathfrak{N}$. Vi er på jakt etter en mengde ikke-logiske aksiomer

[35] På engelsk sier en at DO er 'complete'. Dette er ikke det samme som at vår logikk er komplett. Dette er lett å se fra

$$\forall\phi \left(\begin{array}{ccc} DO \vdash \phi & \text{og} & \forall\mathfrak{A}\left[\mathfrak{A} \models DO \Rightarrow \mathfrak{A} \models \phi\right] \\ & \text{ELLER} & \\ DO \vdash \neg\phi & \text{og} & \forall\mathfrak{A}\left[\mathfrak{A} \models DO \Rightarrow \mathfrak{A} \models \neg\phi\right] \end{array} \right)$$

Fokuser på '$\forall\phi$'. Vi har sett at setningen '$\forall x(x \not< x)$' ikke er bevisbar fra N. Det finnes altså noen modeller hvor denne setningen er sann, og andre der den ikke er sann. Fullstendighet krever at dersom en setning er sann i en modell, da er den sann i enhver modell for aksiomene.

Σ slik at $\mathfrak{N} \models \Sigma$, og for enhver setning σ slik at $\mathfrak{N} \models \sigma$, så er $\Sigma \vdash \sigma$. For å begrense forventningene: Gödels første ufullstendighetsteorem sier at uansett mengde av ikke-logiske aksiomer Σ, så vil det finnes setninger σ slik at $\mathfrak{N} \models \sigma$, og $\Sigma \nvdash \sigma$.

Vi trenger noen definisjoner for å komme i gang.

Fullstendige aksiommengder. En mengde ikke-logiske aksiomer Σ kalles *fullstendig* dersom for enhver setning σ, enten $\Sigma \vdash \sigma$, eller $\Sigma \vdash \neg\sigma$.

Aksiomatiserbar. En mengde aksiomer Σ er en *aksiomatisering* av $Th(\mathfrak{N})$ dersom for enhver setning $\sigma \in Th(\mathfrak{N}), \Sigma \vdash \sigma$, der $Th(\mathfrak{N}) = \{\sigma \mid \mathfrak{N} \models \sigma\}$.

Det er i grunnen lett å finne en slik en aksiomatisering, Σ, av $Th(\mathfrak{N})$ - la enkelt og greit $\Sigma = Th(\mathfrak{N})$. Σ er altså mengden av alle setninger som er sanne i $\mathfrak{N}$.[36] Enhver i-$\mathfrak{N}$-sann setning kan da bevises fra $Th(\mathfrak{N})$ i ett steg. Problemet med dette er at det er vanskelig å vite om en setning er med i $Th(\mathfrak{N})$ eller ei. Finnes det uendelig mange tvillingprimtall[37]? Dette har en lurt på i drøye to tusen år. Løsningen vår er dermed ikke informativ. Vi må altså stille strengere krav til Σ. Kravene våre vil være at Σ er en *komplett, konsistent, og avgjørbar* mengde. Gödels første ufullstendighetsteorem kommer til å vise oss at disse kravene ikke kan bli oppfylt.

Før vi kommer dit hen må vi bli enige om hva det vil si at noe er avgjørbart. Nøkkelordet er *rekursjon.*

12.1 Rekursjon - Bene Regressio

Vi har så langt sett noen rekursive definisjoner - f.eks. ble termer, formler og oppfyllbarhet definert rekursivt. Idéen bak slike definisjoner er å først bestemme hvordan de minste elementene er, og deretter si hvordan en kan ut fra disse lage mer komplekse elementer. Vi skal nå se på det som kalles *rekursive mengder*, og *rekursive funksjoner.*

Tenk på funksjonen, og grafen til $f(x) = x^2$. Grafen er $\{\langle x, y\rangle \mid y = x^2\}$. Hvis en bestemmer at definisjonsmengden er $\mathbb{N}$, da er også verdimengden $\mathbb{N}$. Hvis vi nå, i reduksjonens ånd, identifiserer funksjonen med dens graf, ser vi at en funksjon ikke er annet en en mengde av par. La nå $\phi \equiv y = ExSS0$. Vi ser da at ϕ *representerer* funksjonen x^2, og dermed en mengden av par. Formelt:

[36] I det kommende begrenser vi oss ofte til *setninger.* Dette gjør tekniske ting litt lettere, og siden en kan bevise en formel hviss en kan bevise $\forall$-lukningen av formelen, kan en anta at alle logiske, og ikke-logiske aksiomer er setninger. Videre er sannhetsbetingelsene for en formel og lukningen av formelen like, så hverken syntaktisk eller semantisk er innskrenkningen av betydning. Leseren oppfordres til å prøve å bevise at for enhver modell $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models \phi \iff \mathfrak{A} \models \forall x\phi$.

[37] Dersom både k og $k + 2$ er primtall, kalles paret for tvillingprimtall.

Rekursiv/representere. En mengde $A \subseteq \mathbb{N}^k$ sies å være *rekursiv* dersom det finnes en $\mathcal{L}_{NT}$-formel $\phi(\underset{\sim}{x})$ slik at

$$\begin{aligned} \forall \underset{\sim}{a} \in A \quad & N \vdash \phi(\underset{\sim}{\bar{a}}) \\ \forall \underset{\sim}{a} \notin A \quad & N \vdash \neg\phi(\underset{\sim}{\bar{a}}) \end{aligned}$$

I så tilfellet sier vi at formelen ϕ *representerer* mengden A.

der vi bruker at $\underset{\sim}{x} \equiv \langle x_1, x_2, \ldots x_k \rangle$, og som før at $\bar{a} \equiv S^a 0 \equiv \underbrace{SSS\ldots S}_{a\,S-er}0$.
Altså er $\underset{\sim}{\bar{a}} \equiv \langle \overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots \overline{a_k} \rangle$.

Representasjon av funksjoner i N. Dersom $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ er en rekursiv funksjon representert av formelen $\phi(\underset{\sim}{x}, y)$, da har vi at for alle $\underset{\sim}{a} \in \mathbb{N}^k$,

$$N \vdash \forall y[\phi(\underset{\sim}{\bar{a}}, y) \leftrightarrow y = \overline{f\underset{\sim}{a}}]$$

Vi ser på tilfellet der $k = 1$. Det generelle tilfelle er likt, men syntaktisk knotete.[38]

Bevis. Vi antar for kontradiksjon at

$$N \nvdash \forall y[\phi(\bar{a}, y) \leftrightarrow y = \overline{fa}]$$

Ved kompletthetsteoremet er dette ekvivalent med

[38]Ved allkvantorlemmaet er dette ekvivalent med

$$N \vdash \phi(\bar{a}, y) \leftrightarrow y = \overline{fa}$$

Leary foreslår at dette kan vises ved først å la $\alpha(x, y)$ representere funksjonen, og så vise at $\phi(x, y) \equiv \alpha(x, y) \wedge (\forall z < y)(\neg\alpha(x, z)$ også representerer funksjonen. Påstanden hevdes deretter å være ekvivalent med (a) og (b):

$$\begin{aligned} (a) \quad & N \vdash \phi(\bar{a}, \overline{fa}) \\ (b) \quad & N \vdash \left[(\alpha(\bar{a}, y) \wedge (\forall z < y)(\neg\alpha(\bar{a}, z))) \to y = \overline{fa}\right] \end{aligned}$$

For å vise (b) anbefales leseren å bruke deduksjonsteoremet og vise

$$N \cup \{\alpha(\bar{a}, y)\} \cup \{(\forall z < y)(\neg\alpha(\bar{a}, z))\} \vdash y = \overline{fa}$$

Deduksjonsteoremet sier at gitt at θ er en *setning*, da er

$$\Sigma \cup \{\theta\} \vdash \phi \iff \Sigma \vdash \theta \to \phi$$

Dermed kan vi ikke følge anbefalingen over. Jeg har prøvd å vise teoremet direkte, dessverre uten hell. Derfor gjør vi det noe tungvinte modellteoretiske argumentet i stedet. Leary har hentet teoremet og anbefalingen fra beviset i Enderton [4] teorem 33K. Enderton fullfører beviset slik anbefalingen tilsier, men det skal sies at slik deduksjonsteorem er formulert i Enderton, så er dette tilforlatelig.

$$\exists\mathfrak{A}\big[\mathfrak{A} \models N \land \mathfrak{A} \not\models \forall y[\phi(\bar{a}, y) \leftrightarrow y = \overline{fa}]\big]$$

La $\mathfrak{A}$ være en modell som oppfyller betingelsen over. Siden f er en tallfunksjon, og vi ikke vet hva elementene i A er, lager vi en funksjon $i : \mathbb{N} \to A$. Vi definerer i rekursivt slik:

$$\begin{array}{ll} (1) & i(0) = 0^{\mathfrak{A}} \\ (2) & i(n+1) = (S\overline{n})^{\mathfrak{A}} \end{array}$$

Vi definerer så hvordan f skal se ut i $\mathfrak{A}$ ved

$$\langle a, fa\rangle \in f \iff \langle ia, ifa\rangle \in f_{\mathfrak{A}}$$

Siden $\langle a, fa\rangle \in f$ er tilfellet per definisjon for alle $a \in \mathbb{N}$ er da også $\langle ia, ifa\rangle \in f_{\mathfrak{A}}$ tilfellet for alle $a \in \mathbb{N}$.

Vi ser da at $ifa = \overline{fa}^{\mathfrak{A}} = f_{\mathfrak{A}} ia = f_{\mathfrak{A}} \overline{a}^{\mathfrak{A}}$. Første likhet holder ved definisjon av i. Andre likhet holder ved definisjon av $f_{\mathfrak{A}}$, og tredje igjen ved definisjon av i.

Fra semantikken for første ordens logikk har vi at for alle tilordningsfunksjoner $s : Vars \to A$ er følgende setninger ekvivalente

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A} \not\models \forall y[\phi(\bar{a}, y) \leftrightarrow y = \overline{fa}][s] & & \\ \mathfrak{A} \models \exists y \neg[\phi(\bar{a}, y) \leftrightarrow y = \overline{fa}][s] & & \\ \mathfrak{A} \models \neg[\phi(\bar{a}, y) \leftrightarrow y = \overline{fa}][s[y|b]] & \text{for en } b \in A & \\ \mathfrak{A} \models [\phi(\bar{a}, y) \land y \neq \overline{fa}][s[y|b]] & \text{eller} & \mathfrak{A} \models [\neg\phi(\bar{a}, y) \land y = \overline{fa}][s[y|b]] \end{array}$$

Vi viser at begge disse siste disjunktene leder til en kontradiksjon.

(1)
Anta at $b \in A$ er slik at $\mathfrak{A} \models \phi(a, y)[s[y|b]]$ og $\mathfrak{A} \models y \neq \overline{fa}[s[y|b]]$. Dermed er $b \neq \overline{fa}^{\mathfrak{A}} = ifa$. Dermed er $\langle ia, in\rangle \notin f_{\mathfrak{A}}$ for alle $n \in \mathbb{N}$ slik at $in = b$. Dermed er også $\langle a, n\rangle \notin f$. Siden $\phi(x, y)$ representerer f, har vi da at $N \vdash \neg\phi(\overline{a}, \overline{n})$, som ved sunnhetsteoremet gir at for enhver $s : Vars \to A$, $\mathfrak{A} \models \neg\phi(\overline{a}, \overline{n})[s]$. Siden $\overline{n}$ er en $\mathcal{L}_{NT}$-term er dette ekvivalent med $\mathfrak{A} \models \neg\phi(\overline{a}, y)[s[y|\overline{n}^{\mathfrak{A}}]]$, og siden $\overline{n}^{\mathfrak{A}} = in = b$ har vi at $\mathfrak{A} \models \neg\phi(\overline{a}, y)[s[y|b]]$, som er en kontradiksjon siden vi antok at $\mathfrak{A} \models \phi(\overline{a}, y)[s[y|b]]$.

(2)
Anta nå at $\mathfrak{A} \models \neg\phi(\bar{a}, y)[s[y|b]]$ og $\mathfrak{A} \models y = \overline{fa}][s[y|b]]$. Siste konjunkt sier da at $b = \overline{fa}^{\mathfrak{A}}$. Ved likheten over er $\overline{fa}^{\mathfrak{A}} = ifa$. Ved definisjon av i og $f_{\mathfrak{A}}$ er da $\langle a, fa\rangle \in f$ og $\langle ia, ifa\rangle \in f_{\mathfrak{A}}$. Samme argument som over leder da til at $\mathfrak{A} \models \phi(\overline{a}, y)[s[y|\overline{fa}^{\mathfrak{A}}]]$, og siden $b = \overline{fa}^{\mathfrak{A}}$ og vi har antatt at $\mathfrak{A} \models \neg\phi(a, y)[s[y|b]]$ har vi vår siste kontradiksjon.

QED. $\square$

Vi må bli enige om hva det vil at en mengde er *definerbar.*

Definerbar. En mengde $A \subseteq \mathbb{N}^k$ sies å være *definerbar* dersom det finnes en $\mathcal{L}_{NT}$-formel $\phi(\underset{\sim}{x})$ slik at

$$\forall \underset{\sim}{a} \in A \quad \mathfrak{N} \vDash \phi(\bar{\underset{\sim}{a}})$$
$$\forall \underset{\sim}{a} \notin A \quad \mathfrak{N} \vDash \neg\phi(\bar{\underset{\sim}{a}})$$

I så tilfellet sier vi at formelen ϕ *definerer* mengden A.

Vi ser da at dersom en formel ϕ representerer en mengde A, følger det fra sunnhetsteoremet at ϕ definerer mengden: $Rep(\phi, A) \Rightarrow Def(\phi, A)$.

Et lite eksempel: Alle mengder med kun ett naturlig tall er definerbare. Påstanden sier altså at $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \ldots$ alle er definerbare. Dette er lett å vise siden $\phi_n(x) \equiv \overline{n} = x$ er sann om bare ett objekt for enhver $n \in \mathbb{N}$. Eksempelvis har vi at $\{5\}$ er definert av formelen '$SSSSS0 = x$' siden $5 \in \{5\}$ og $\mathfrak{N} \vDash SSSSS0 = SSSSS0$, mens for alle tall forskjellig fra fem, altså $\forall n \notin \{5\}, \mathfrak{N} \vDash SSSSS0 \neq \overline{n}$. Samme formel er åpenbart tilstrekkelig til å representere alle slike enkeltmengder.

Ekskurs:

Det er vanlig å definere rekursive mengder via turingmaskiner (TM) el. En mengde Γ er da *rekursiv* dersom det finnes en TM, M, slik at:

1. $\forall a \in \Gamma$: dersom en gir a som input til M, stopper M og sier "ja".
2. $\forall a \notin \Gamma$: dersom en gir a som input til M, stopper M og sier "nei".

En mengde Γ er *rekursivt enumererbar, r.e.*, dersom det finnes en TM, M, slik at:

1. $\forall a \in \Gamma$: dersom en gir a som input til M, stopper M og sier "ja".
2. $\forall a \notin \Gamma$: dersom en gir a som input til M, stopper M aldri.

Hvis en TM M gis input a, og stopper med b skrevet på tapen, skriver vi $M(a) = b$.

En funksjon $f : A \to B$ er rekursiv dersom det finnes en TM M, slik at

$$\forall a \in A[f(a) = b \iff M(a) = b]$$

At en mengde er TM-rekursiv er ekvivalent med at den er representerbar-rekursiv. At en mengde Γ er TM-r.e er ekvivalent med at det finnes en Σ-formel $\phi(\underset{\sim}{x})$ som *definerer* Γ

Turings tese. En funksjon er beregnbar hviss den er rekursiv.

Dette blir av de fleste sett på som en empirisk tese siden den sier noe om forholdet mellom en ikke-matematisk egenskap, *beregnbarhet*, og en matematisk egenskap, *rekursivitet*.[39]

Slutt ekskurs.

12.2 Bundne kvantorer og det aritmetiske hierarkiet

Våre mentale gaver er (dessverre?) begrenset. Det sies at folk flest ikke klarer å konsentrere seg om flere enn tre instrumenter i en symfoni om gangen. På samme måte er vel intuisjoner om hva $\Box\Diamond\Diamond\Box(P \to \Diamond(Q \vee \Box R))$ skal bety i en metafysisk kontekst heller svake. På lik linje er det vel de færreste som intuitivt ser at formelen

$$\forall x \forall \epsilon \exists \delta \forall y \big[\epsilon > 0 \to \{(|x-y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \epsilon\}\big]$$

sier at funksjonen f er kontinuerlig. Vi skal nå se på hvordan en klassifiserer formler etter kompleksitet, der kompleksiteten er gitt av hvor mange kvantoralterasjoner formelen inneholder.

Bundne kvantorer. Dersom termen x ikke forekommer i termen t, kalles kvantorene

$$\forall x < t, \forall x \leq t, \exists x < t, \exists x \leq t$$

for bundne kvantorer, og er forkortelser for hhv.

$$\forall x(x < t), \forall x(x \leq t), \exists x(x < t), \exists x(x \leq t)$$

Altså er

$$(\forall x < \overline{99})\phi(x) \equiv \forall x(x < \overline{99} \to \phi(x))$$

Δ-formler. Mengden av alle Δ-formler inneholder

1. Alle atomære formler.
2. Alle negasjoner av atomære formler
3. Er lukket under operatorene $\wedge$ og $\vee$.
4. Er lukket under alle bundne kvantorer.

Negasjonen av en Δ-formel trenger altså ikke være en Δ-formel, men er, ved å bruke DeMorganslovene, ekvivalent med en Δ-formel. Beviset overlates til den ivrige.

Σ-formler. Mengden av Σ-formler er mengden av Δ-formler lukket under eksistenskvantoren '$\exists$'.

[39] Se artikkelen *Turings teorem og myten om en tese* av Lars Kristiansen publisert i NORMAT (Nordisk matematisk tidsskrift) 46 (1998), 76-87, for en fin og leservennlig artikkel om hvorfor tesen ikke burde anses som empirisk, men som en matematisk definisjon.

Π-formler. Mengden av Π-formler er mengden av Δ-formler lukket under allkvantoren '$\forall$'.

Noen eksempler:
'$(\forall x < t)\alpha(x)$' er en Δ-formel, mens '$\exists y(\forall x < t)\alpha(x)$' er en Σ-formel og '$\forall y(\forall x < t)\alpha(x)$' er en Π-formel.

Aritmetisk hierarki. Litt mer generelt kan en klassifisere formler således:

- En formel som bare inneholder bundne kvantorer på formen Δ_0-, Σ_0-, og Π_0-formel.
- Dersom ψ er på formen Π_n, da er $\exists x_1 \dots \exists x_n \psi$ på formen Σ_{n+1}.
- Dersom ψ er på formen Σ_n, da er $\forall x_1 \dots \forall x_n \psi$ på formen Π_{n+1}.
- Et Σ_n-utsagn er ekvivalent med en formel på Σ_n-form
- Et Π_n-utsagn er ekvivalent med en formel på Π_n-form
- Et Δ_n-utsagn er ekvivalent med både en formel på Σ_n-form og en formel på Π_n-form.

Våre Δ-, Σ-, og Π-formler er altså Δ_0-, Σ_1-, Π_1-formler. Poenget med subskriptet er å telle hvor mange alterasjoner av kvantorer det finnes i formelen. Dersom θ er en kvantorfri formel, er altså $\forall x \exists y \exists z \forall v \theta$ en Π_3-formel, mens $\forall x \forall y \forall z \forall v \theta$ er en Π_1-formel, og $\exists x \exists y \exists z \forall v \theta$ en Σ_2-formel.

Bevisbare termidentiteter. For enhver variabelfri term t, $N \vdash t = \overline{t^{\mathfrak{N}}}$

Først et eksempel. Dersom $t \equiv SSS0 + SS0$, vil det at $N \vdash t = \overline{t^{\mathfrak{N}}}$ altså si at $N \vdash SSS0 + SS0 = SSSSS0$, som burde stemme siden $SSS0^{\mathfrak{N}} = 3$, $SS0^{\mathfrak{N}} = 2$, og $SSSSS0^{\mathfrak{N}} = 5$.

Bevis. Vi beviser lemmaet ved å gjøre induksjon på termkompleksiteten. Dersom $t \equiv 0$, da er $t^{\mathfrak{N}} = 0$, så vi må bevise at $N \vdash 0 = 0$.[40] Formelt så får vi dette slik:

1.	$x = x$	E1
2.	$\forall x(x = x)$	Kvantor lemma, 1
3.	$\forall x(x = x) \rightarrow 0 = 0$	Q
4.	$0 = 0$	PC, 2, 3

[40]Legg merke til at '0' først blir brukt som termen '0' over, for så å være navnet på tallet 0. Vi har også trivielt at termen '$\overline{0}$' er lik termen '0', og dermed at $\overline{0^{\mathfrak{N}}} = 0$ som er en syntaktisk likhet i den forstand at funksjonen '$^{\mathfrak{N}}$' applisert på den syntaktiske termen '0' gir tallet 0, hvorpå funksjonen '$^{-}$', gir den syntaktiske termen '0'. Derimot er '$\overline{0}^{\mathfrak{N}} = 0$' et utsagn om ontologisk likhet - funksjonen '$^{\mathfrak{N}}$' applisert på den syntaktiske termen '0' er identisk med tallet 0.

Anta nå som induksjonshypotese (IH) at $N \vdash u = \overline{u^{\mathfrak{N}}}$, og $N \vdash v = \overline{v^{\mathfrak{N}}}$. Vi må vise at $N \vdash Su = S(\overline{u^{\mathfrak{N}}})$, og $N \vdash u + v = \overline{u^{\mathfrak{N}} + v^{\mathfrak{N}}}$.

1.	$u = \overline{u^{\mathfrak{N}}}$	IH
2.	$x = y \to Sx = Sy$	E2
3.	$\forall x \forall y (x = y \to Sx = Sy)$	Kvantorlemma, 2
4.	$\forall y (u = y \to Su = Sy)$	Q, 3
5.	$u = \overline{u^{\mathfrak{N}}} \to Su = S\overline{u^{\mathfrak{N}}}$	Q, 4
6.	$Su = S\overline{u^{\mathfrak{N}}}$	PC, $1, 5$

Vi vet fra *Tall lemma* over at $\overline{u^{\mathfrak{N}}} + \overline{v^{\mathfrak{N}}} = \overline{u^{\mathfrak{N}} + v^{\mathfrak{N}}}$. Det gjenstår dermed kun å vise at $N \vdash u + v = \overline{u^{\mathfrak{N}}} + \overline{v^{\mathfrak{N}}}$. Siden '+' er et binært funksjonssymbol i objektspråket vårt, følger setningen ved like manøvre som i beviset over. Beviset for de siste tilfellene, $\times$ og E, er likt, og vi overlater slavearbeidet til leseren. □

Rossers lemma.

$$N \vdash (\forall x < \bar{a})\big[x = \bar{0} \vee x = \bar{1} \vee \ldots x = \overline{a - 1}\,\big]$$

Bevis. Induksjon på a.

□

Rossers korrolar.

$$N \vdash (\forall x < \bar{a})\phi(x) \leftrightarrow \big[\phi(\bar{0}) \wedge \phi(\bar{1}) \wedge \ldots \phi(\overline{a - 1})\big]$$

Bevis. Induksjon på a.

□

Σ-kompletthet. Dersom $\phi(\underset{\sim}{x})$ er en Σ-formel med frie variabler $\underset{\sim}{x}$, og $\underset{\sim}{t}$ er variabelfrie termer, og $\mathfrak{N} \models \phi(\underset{\sim}{t})$, da er $N \vdash \phi(\underset{\sim}{t})$.

Bevis. Induksjon på formelkompleksitet.

Anta at ϕ er atomær, f.eks. $x < y$, og t og u er variabelfrie termer, og at $t^{\mathfrak{N}} < u^{\mathfrak{N}}$. Siden vi vet fra termidentitetslemmaet over at $N \vdash t = \overline{t^{\mathfrak{N}}}$, samt $N \vdash u = \overline{u^{\mathfrak{N}}}$, og $t^{\mathfrak{N}} < u^{\mathfrak{N}} \Rightarrow N \vdash \overline{t^{\mathfrak{N}}} < \overline{u^{\mathfrak{N}}}$ fra *Tall lemma*, følger det at $\mathfrak{N} \models t < u \Rightarrow N \vdash t < u$. Leseren oppfordres til å prøve å gjøre dette beviset i vårt bevissystem.

Negasjon og disjunksjon overlates til leseren.

Anta nå at $\mathfrak{N} \models \exists x \psi(x)$ der $\psi(x)$ har for enkelhets skyld kun en fri variabel. Målet er å vise at $N \vdash \exists x \psi(x)$. Siden $\mathfrak{N} \models \exists x \psi(x)$ finnes det et naturlig tall a slik at $\mathfrak{N} \models \psi(\bar{a})$. Vi antar som induksjonshypotese at $N \vdash \psi(\bar{a})$.

1.	$\psi(\bar{a})$	IH
2.	$\forall x \neg\psi(x) \to \neg\psi(\bar{a})$	Q
3.	$\neg\forall x \neg\psi(x)$	PC, $1, 2$
4.	$\exists x \psi(x)$	$\equiv 3$

□

Utvidet Σ-kompletthet. Dersom $\phi(\underset{\sim}{x})$ representerer en mengde P, da

$$\mathfrak{N} \models \exists x \phi(x, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}) \Longrightarrow N \vdash \exists x \phi(x, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n})$$

Bevis. Siden $\phi(\underset{\sim}{x})$ representerer P har vi at $\underset{\sim}{a} \in P \Rightarrow N \vdash \phi(\underset{\sim}{\overline{a}})$. Ved sunnhetsteoremet har vi da at $\mathfrak{A} \models \phi(\underset{\sim}{\overline{a}})$ for alle modeller $\mathfrak{A} \models N$. Vi får dermed følgende implikasjoner:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \phi(\underset{\sim}{\overline{a}}) &\iff \mathfrak{A} \models \phi(\underset{\sim}{\overline{a}})[s] \qquad\qquad \forall s : Vars \to A \\ &\iff \mathfrak{A} \models \phi(x, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n})[s[x|\overline{a_1}^{\mathfrak{A}}]] \\ &\iff \mathfrak{A} \models \exists x \phi(x, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n})[s] \\ &\iff \mathfrak{A} \models \exists x \phi(x, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}) \\ &\iff N \vdash \exists x \phi(x, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}) \end{aligned}$$

Dermed har vi at siden

$$\begin{aligned} \mathfrak{N} \models \exists x \phi(x, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}) &\iff \mathfrak{N} \models \exists x \phi(x, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n})[s] \\ &\iff \mathfrak{N} \models \phi(x, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n})[s[x|\overline{a_1}^{\mathfrak{N}}]] \\ &\iff \mathfrak{N} \models \phi(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n})[s] \\ &\iff \langle \overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n} \rangle \in P \end{aligned}$$

at dersom $\mathfrak{N} \models \exists x \phi(x, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n})$ da $N \vdash \exists x \phi(x, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n})$. Lesere oppfordres til å gjøre samme ekvivalensutvikling for når $\underset{\sim}{A} \notin P$, og vise at det ikke gir at $\mathfrak{N} \models \neg\exists x \phi(x, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}) \Longrightarrow N \vdash \neg\exists x \phi(x, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n})$. □

Δ-kompletthet. Dersom $\phi(\underset{\sim}{x})$ er en Δ-formel med frie variabler $\underset{\sim}{x}$, og $\underset{\sim}{t}$ er variabelfrie termer, og $\mathfrak{N} \models \phi(\underset{\sim}{t})$, da er $N \vdash \phi(\underset{\sim}{t})$. Dersom $\mathfrak{N} \models \neg\phi(\underset{\sim}{t})$, da er $N \vdash \neg\phi(\underset{\sim}{t})$

Bevis. Anta at $\phi(\underset{\sim}{x})$ er en Δ-formel, og $\underset{\sim}{t}$ er variabelfrie termer, og $\mathfrak{N} \models \phi(\underset{\sim}{t})$. Siden ϕ også er en Σ-formel, følger det at $N \vdash \phi(\underset{\sim}{t})$. Anta nå at $\mathfrak{N} \not\models \phi(\underset{\sim}{t})$. Siden $\phi(\underset{\sim}{t})$ er en setning, følger det at $\mathfrak{N} \models \neg\phi(\underset{\sim}{t})$. Siden ϕ er en Δ-setning, er $\neg\phi$ sterkt ekvivalent med en Δ-setning ψ, og dermed er $N \vdash \phi(\underset{\sim}{t})$.

□

Δ-definerbare mengder er rekursive. Anta at $A \subseteq \mathbb{N}^k$ er *definert* av en Δ-formel $\phi(\underset{\sim}{x})$. Da er A en *rekursiv* mengde.

Bevis. Dette følger direkte fra Δ-kompletthetsteoremet over. □

For å bevise det første ufullstendighetsteoremet trenger vi to lemma:

Numerisk bestemt. En $\mathcal{L}_{NT}$-formel $\phi(\underset{\sim}{x})$ er positivt numerisk bestemt dersom for alle $\underset{\sim}{a} \in \mathbb{N}^k, \mathfrak{N} \vDash \phi(\underset{\sim}{\overline{a}}) \Rightarrow N \vdash \phi(\underset{\sim}{\overline{a}})$. En formel $\phi(\underset{\sim}{x})$ er numerisk bestemt dersom både $\phi(\underset{\sim}{x})$ og $\neg\phi(\underset{\sim}{x})$ er positivt numerisk bestemt.

Mengen av alle numerisk bestemte formler. Mengden av alle numerisk bestemte formler inneholder alle atomær formel og er lukket under negasjon, disjunksjon og bundne kvantorer.

Bevis. Induksjon. Bruk Rossers korollar i beviset for bunden allkvantor. □

E3$^+$ - Tores utvidede regel 1. For enhver formel θ, så er

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y} \to [\theta(\underset{\sim}{x}) \to \theta(\underset{\sim}{y})]$$

et logisk aksiom.

Bevis. En oppskrift: Det atomære tilfellet er bare regelen E3. Bevis så at dersom E3$^+$ gjelder for θ, da gjelder det også for $\neg\theta$. For å bevise dette trenger en først å vise at identitet er symmetrisk, for så å vise at en kan bytte variabler i en formel, fra x til y f.eks. Vis deretter at påstanden holder for disjunksjon.

Sett nå at

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y} \to [\theta(\underset{\sim}{x}) \to \theta(\underset{\sim}{y})]$$

holder. Vi må vise at

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y} \to [\forall z\theta(\underset{\sim}{x}, z) \to \forall z\theta(\underset{\sim}{y}, z)]$$

også holder, der z ikke forekommer blant $\underset{\sim}{x}$ eller $\underset{\sim}{y}$. Anta for kontradiksjon negasjonen av $\forall$-lukningen av formelen, og vis ved et modellteoretisk argument at dette er en kontradiksjon. □

Q^+ **- Tores utvidede regel 2.** Dersom vi jobber med språket $\mathcal{L}$ og t er en term i dette språket, og t er substituerbar for y i θ, da er

$$\exists x \forall y \theta \to \exists x \theta_t^y$$

et logisk aksiom av typen Q^+.

Bevis. Oppgave tildeles leseren. Litt hjelp: Vis at aksiomet bevarer sannhet ved å se på en tilfeldig modell $\mathfrak{A}$ og en tilfeldig tilordningsfunksjon $s : Vars \to A$, og vis at

$$\mathfrak{A} \models \exists x \forall y \theta[s] \Longrightarrow \mathfrak{A} \models \exists x \theta_t^y[s]$$

Vi kommer til å få bruk for dette når vi skal bevise Rossers utvidelse av Gödels første ufullstendighetsteorem.[41] □

Preneks normalform. En formel sies å være i preneks normalform dersom den starter den er satt i sammen av 0 eller flere kvantorer etterfulgt av en kvantorfri formel.

Alle formler kan skrives på preneks normalform. *Bevis.* Dette overlates til leseren. Vis at følgende formler er tautologier der x ikke forekommer fritt i ψ:

$$\begin{array}{rrcl}
1. & \forall x\phi \wedge \psi & \leftrightarrow & \forall x(\phi \wedge \psi) \\
2. & \forall x\phi \vee \psi & \leftrightarrow & \forall x(\phi \vee \psi) \\
3. & \exists x\phi \wedge \psi & \leftrightarrow & \exists x(\phi \wedge \psi) \\
4. & \exists x\phi \vee \psi & \leftrightarrow & \exists x(\phi \vee \psi) \\
5. & \forall x\phi \to \psi & \leftrightarrow & \exists x(\phi \to \psi) \\
6. & \exists x\phi \to \psi & \leftrightarrow & \forall x(\phi \to \psi)
\end{array}$$

□

[41] En del bevissystem tillater å slutte fra '$\exists x\theta$' til 'θ_t^x' dersom t ikke forekommer før i beviset eller i premissene. Dette gjør det lettvint å bli kvitt eksistenskvantorer, noe som er vrient i vårt system. Grunnen til at vi ikke ønsker denne regelen er at den forplikter oss på å ha navn for alle objektene i domenet, eller å innføre nye konstanter til bruk i bevissystemet, men ikke i modellteorien. Hvis vi skulle ha gjort bruk av en slik 'eksistensiell introduksjon' regel, måtte vi altså ha omarbeidet hele bevissystemet.

Dog merk at dersom en i språket $\mathcal{L}$ har en mengde aksiomer A og $A \vdash \exists x\theta$, og det finnes en $\mathcal{L}$-term t slik at for enhver $\mathcal{L}$-modell $\mathfrak{A}$ slik at $\mathfrak{A} \models A$ og enhver tilordningsfunksjon $s : Vars \to A$, $\mathfrak{A} \models \theta[s[x|t^{\mathfrak{A}}]]$, da er det alltid tilfellet, via sunnhet og komplett, at $A \vdash \exists x\theta \Longrightarrow A \vdash \theta_t^x$. Leseren oppfordres til å kvasiformalisere denne setningen og så bevise den.

Q^+ gjør livet litt lettere i det at en ikke bare kan fjerne allkvantorer dersom de står ytterst i en formel. Ved å bruke preneks normalformene og kvantordistribusjonslovene under, blir da mengden av formler som en kan fjerne allkvantorer fra mye større.

Kvantordistribusjon. For enhver formel ϕ og ψ, så er følgende formler tautologier:

$$\begin{array}{rrcl}
1. & \forall x\phi \wedge \forall x\psi & \leftrightarrow & \forall x(\phi \wedge \psi) \\
2. & \exists x\phi \vee \exists x\psi & \leftrightarrow & \exists x(\phi \vee \psi) \\
3. & \forall x\phi \vee \forall x\psi & \rightarrow & \forall x(\phi \vee \psi) \\
4. & \exists x(\phi \wedge \psi) & \rightarrow & \exists x\phi \wedge \exists x\psi
\end{array}$$

Bevis. Øvelse □

13 Ufullstendige forarbeidelser 2

Vi skal nå se hvordan syntaktiske objekter, formler og bevis, kan aritmetiseres. Idéen er å plukke ut de formlene og bevisene som vi er interessert i, f.eks. de setningene som kan syntaktisk deriveres fra N, og finne en mengde tall, gödeltall, slik at mengden av alle gödeltall for f.eks. deriverbare formler, har en viss egenskap. Hvis vi dermed ser et slik tall, så vet vi at det representerer en deriverbar formel. Ved slik å lage en bijeksjon mellom en klasse syntaktiske objekter og en mengde tall, ved å aritmetisere semantikken, kan vi uttrykke metaspråkutsagn ved tall og få syntaktiske formler til å referere til seg selv.

I avsnitt 3 så vi at formelen

$$Prim(x) \equiv \big[x > 1 \wedge \forall yz(x \neq SSy \times SSz)\big]$$

"sier" at x er et primtall. Vi kan nå i lys av de nyinnførte bundne kvantorene, finne en Δ-formel for dette, nemlig

$$Prim(x) \equiv SS0 \leq x \wedge (\forall yz < x)(x \neq SSy \times SSz)$$

Siden '$Prim(x)$' er sann om alle, og bare primtall, har vi at formelen '$Prim(x)$' *definerer* mengden av alle primtall, som vi kaller 'Prim'. Siden '$Prim(x)$' er en Δ-formel, følger det fra Δ-kompletthet at formelen '$Prim(x)$' også *representerer* mengden Prim.

Vi skal i det kommende se mange formler som representerer diverse mengder. Vi skal også se at ingen formelen '$Bevisbar_A(x)$' kan *representere* mengden av alle fra-A-bevisbare setninger (Turings uavgjørbarhetsteoremet), og siden også at ingen formelen, '$Sann_{\mathfrak{N}}(x)$', kan *definere* mengden av alle i-$\mathfrak{N}$-sanne formler (Tarskis teorem). Vi skal gå igjennom hovedpunktene for hvordan gödelkoding fungerer, og se noen eksempler på hvordan en kan lage representerende formler, men vi håper at en mer forklarende framgangsmåte er tilstrekkelig da detaljene i det følgende er forferdelig tid- og plasskrevende og av teknisk og lite interessant karakter.

13.1 Primtallskoding for dummies

Før vi går i gang med primtallskoding, skal vi formulere noen Δ-formler som vil definere mengden av alle partall, mengden av alle primtallspar, og mengden av alle par $\langle a, b \rangle$, slik at a er en faktor i b (som er det samme som at dersom en deler b med a, så får en et helt tall som svar). Disse mengdene betegner vi hhv. $\mathsf{Partall}$, $\mathsf{Primpar}$ og Div.

$$Partall(x) \equiv \quad (\exists y < x)(x = y \times y)$$

$$\begin{aligned} Primpar(x, y) \equiv \quad & Prim(x) \wedge Prim(y) \wedge x < y \wedge \\ & (\forall z < y)(Prim(z) \rightarrow z \leq x) \end{aligned}$$

$$Div(x, y) \equiv \quad (\exists z \leq y)(x \times z = y)$$

Alle disse formlene er Δ-formler, så hvis et tall $a \in \mathsf{Partall}$, da $N \vdash Par(\bar{a})$, og hvis $a \notin \mathsf{Partall}$, da $N \vdash \neg Partall(\bar{a})$.

Merk at vi i formelen '$Primpar(x, y)$', har brukt formelen '$Prim(x)$'. Dette kan vi gjøre siden mengden av alle Δ-utsagn er lukket under konjunksjon, negasjon og bundne kvantorer.

Vi starter med en forenklet versjon av vår offisielle koding. Idéen er å tilegne hvert symbol i $\mathcal{L}$ hvert sitt tall:

Symbol	Symbolnummer	Symbol	Symbolnummer
$\neg$	1	$+$	13
$\vee$	3	$\times$	15
$\forall$	5	E	17
$=$	7	$<$	19
0	9	(	21
S	11	)	23
		v_i	$2i$

Setningen '$= 0S0$' kan dermed oversettes til sekvensen $\langle 7, 9, 11, 9 \rangle$. For å kode dette i primtall, lar vi det første tallet i sekvensen være eksponenten til det første primtallet, det andre tallet i sekvensen blir eksponenten til det andre primtallet, osv.: Sekvensen $\langle 7, 9, 11, 9 \rangle$ blir dermed kodet som tallet $2^7 3^9 5^{11} 7^9 = 4964250291131250000000$. Siden vi vet at alle naturlige tall har en unik primtallsfaktorisering (aritmetikkens fundamentalteorem), kan vi *dekode* tallet 4964250291131250000000 ved å finne tallets unike primtallsfaktorisering, $2^7 3^9 5^{11} 7^9$, og dermed gjenfinne sekvensen $\langle 7, 9, 11, 9 \rangle$, og derfra kan vi slå opp i listen over og finne at tallet 4964250291131250000000 koder setningen '$= 0S0$'.

13.2 Koding er rekursivt

Siden 0 ikke forekommer i listen over, vil c være kodetallet til sekvensen $\langle k_1, k_2, \ldots, k_n \rangle$ hviss $c = 2^{k_1} 3^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$, der p_n er det n-te primtallet, og 2 er det første.

Kodetall - en rekursiv mengde. Mengden av alle tall som koder endelige sekvenser er en rekursiv mengde.

Bevis. Den enkleste måten å vise dette på er å finne en Δ-formel, '$Kodetall(x)$', som representerer mengden av kodetall; $\mathsf{Kodetall}$:

$$\begin{aligned} Kodetall(x) \quad &\equiv Div(SS0, x) \wedge (\forall y < x)(\forall z < y) \\ &\big[(Prim(y) \wedge Div(y, x) \wedge Primpar(z, y)) \rightarrow Div(z, x)\big] \end{aligned}$$

$\square$

Formelen '$Kodetall(x)$' "sier" altså at 2 er en faktor i x, og at dersom et primtall p_n er en faktor i x, da er også ethvert primtall p_i der $1 \leq i < n$ en faktor i x.

Siden vi bare har brukt bundne kvantorer, og $Prim(x)$, $Div(x, y)$, $Primpar(x, y)$ alle er Δ-formler, er også $Kodetall(x)$ en Δ-formel.

Følgende mengder er også *representerbare* - formlene er Δ-formler:

Mengde	**Formel**	**Beskrivelse**
ItePrim	$ItePrim(i, y)$	y er det i-te primtallet
IteElement	$IteElement(e, i, c)$	$c \in \mathsf{Kodetall}$, og e er det i-te elementet i sekvensen for c.
Lengde	$Lengde(c, l)$	l er lengden på sekvensen kodet av c

Mengden ItePrim er altså en mengde av par. Siden ItePrim er en mengde av par, kan den sees på som en binær relasjon, og siden mengden åpenbart oppfyller funksjonalitetskravet, kan den sees på som en funksjon. Det finnes altså en funksjon som lister opp alle primtallene i stigende rekkefølge, som i seg selv er ekvivalent med at IthPrim er en rekursiv mengde.

13.3 Koding propper - Gödeltall

Vi skal nå se på funksjonen $\ulcorner \urcorner$. Vi ønsker å assosierer enhver $\mathcal{L}_{NT}$-formel ϕ med et gödeltall, $\ulcorner \phi \urcorner$. Domenet til $\ulcorner \urcorner$ er mengden av alle endelige strenger av symboler fra $\mathcal{L}_{NT}$ og har kodomene $\mathbb{N}$. $\ulcorner \urcorner$ er altså definert for *alle* strenger, ikke bare velformulerte formler. Definisjonen er rekursiv og grusom:

$$
\ulcorner s \urcorner = \begin{cases}
2^1 3^{\ulcorner \alpha \urcorner} & \text{hvis } s \equiv \neg\alpha, \text{ og } \alpha \text{ er en } \mathcal{L}_{NT}\text{-formel} \\
2^3 3^{\ulcorner \alpha \urcorner} 5^{\ulcorner \beta \urcorner} & \text{hvis } s \equiv \alpha \vee \beta, \text{ og } \alpha, \text{ og } \beta \text{ er } \mathcal{L}_{NT}\text{-formeler} \\
2^5 3^{\ulcorner v_i \urcorner} 5^{\ulcorner \alpha \urcorner} & \text{hvis } s \equiv \forall v_i(\alpha), \text{ og } \alpha \text{ er } \mathcal{L}_{NT}\text{-formeler} \\
2^7 3^{\ulcorner t_i \urcorner} 5^{\ulcorner t_2 \urcorner} & \text{hvis } s \equiv = t_1 t_2, \text{ og } t_1, \text{ og } t_2 \text{ er } \mathcal{L}_{NT}\text{-termer} \\
2^9 & \text{hvis } s \equiv 0 \\
2^{11} 3^{\ulcorner t \urcorner} & \text{hvis } s \equiv St, \text{ og } t \text{ er en } \mathcal{L}_{NT}\text{-term} \\
2^{13} 3^{\ulcorner t_1 \urcorner} 5^{\ulcorner t_2 \urcorner} & \text{hvis } s \equiv +t_1 t_2, \text{ og } t_1, \text{ og } t_2 \text{ er } \mathcal{L}_{NT}\text{-termer} \\
2^{15} 3^{\ulcorner t_1 \urcorner} 5^{\ulcorner t_2 \urcorner} & \text{hvis } s \equiv \times t_1 t_2, \text{ og } t_1, \text{ og } t_2 \text{ er } \mathcal{L}_{NT}\text{-termer} \\
2^{17} 3^{\ulcorner t_1 \urcorner} 5^{\ulcorner t_2 \urcorner} & \text{hvis } s \equiv E t_1 t_2, \text{ og } t_1, \text{ og } t_2 \text{ er } \mathcal{L}_{NT}\text{-termer} \\
2^{19} 3^{\ulcorner t_1 \urcorner} 5^{\ulcorner t_2 \urcorner} & \text{hvis } s \equiv < t_1 t_2, \text{ og } t_1, \text{ og } t_2 \text{ er } \mathcal{L}_{NT}\text{-termer} \\
2^{2i} & \text{hvis } s \equiv v_i \\
3 & \text{ellers}
\end{cases}
$$

Det er verdt å merke seg at definisjonen gjør bruk av polsk notasjon: i listen over ble '$\vee$' tilegnet tallet 3. Sekvensen for formelen '$\alpha \vee \beta$' er $\langle 3, \ulcorner \alpha \urcorner, \ulcorner \beta \urcorner \rangle$. Formlene kodes altså som om de var skrevet med prefiks-operatorer. Dermed slipper vi å kode parenteser. Merk også at dersom α er en velformulert $\mathcal{L}_{NT}$-formel eller $\mathcal{L}_{NT}$-term, da er $\ulcorner \alpha \urcorner \in \mathsf{Kodetall}$.

Et eksempel:

La $\phi \equiv (\neg = 0S0)$. Da får vi følgende rekursive gödeltall-utvikling:

$$
\begin{array}{lcl}
\ulcorner \neg = 0S0 \urcorner & = & 2^1 3^{\ulcorner = 0S0 \urcorner} \\
\ulcorner = 0S0 \urcorner & = & 2^7 3^{\ulcorner 0 \urcorner} 5^{\ulcorner S0 \urcorner} \\
\ulcorner S0 \urcorner & = & 2^{11} 3^{\ulcorner 0 \urcorner} \\
\ulcorner 0 \urcorner & = & 2^9
\end{array}
$$

Dermed er

$$
\ulcorner \phi \urcorner = 2^1 3^{2^7 3^{2^9} 5^{2^{11} 3^{2^9}}}
$$

Gitt kodingen over, er altså $2^1 3^{2^7 3^{2^9} 5^{2^{11} 3^{2^9}}}$ navnet på formelen ϕ. Dette tallet trenger en mer en $10^{10^{246}}$ siffer for å skrive ut. Det har vært antatt at det finnes ca. 10^{80} atomer i det observerbare universet...

13.4 Gödeltall og $\mathbb{N}$

Hva hvis noen nå spurte oss om

$$
\begin{aligned}
a = \; & 98935551141319245339924831856740255003655504699409 0 \\
& 42176944832659980629741647549440091849880504470294 4 \\
& 77221525988280931866385966598824657326581967251090 6 \\
& 34457910016684684285351823679090725746371179742206 3 \\
& 01400456149972503854007720935794875092177920000
\end{aligned}
$$

var et gödeltall til en term. Vi vet at hvis a er et gödeltall, så er det på formen $2^b 3^c 5^d$, der $b \neq 0$. Det viser seg at $a = 2^{13} 3^{512} 5^4$, og siden $512 = 2^9 = \ulcorner 0 \urcorner$, og $4 = 2^2 = \ulcorner v_1 \urcorner$, ser vi at $a = \ulcorner +0v_1 \urcorner$. a er altså gödeltallet til $\mathcal{L}_{NT}$-termen '$+0v_1$'. Teoretisk er det altså ikke vanskelig å finne ut om et tall er et gödeltall eller ei. Praktisk sett er tallene så store at de ikke få plass i verken universet eller noen harddisker. Heldigvis er turingmaskiner definert slik at de har uendelig båndlengde, så teoretisk datamaskiner kan altså regne ut svare på enhver forespørsel om et tilfeldig tall a er et gödeltall eller ei, så lenge gödeltallene er gödeltall til rekursive mengder.

Vi skal nå haste gjennom noen *representerbare* mengder. F.eks. vil Δ-formelen '$Term(x)$', representerer mengden av alle gödeltall til termer:

$$\mathsf{Term} = \{a \mid a = \ulcorner t \urcorner \text{ der t er en } \mathcal{L}_{NT}\text{-term}\}$$

Siden '$Term(x)$' *representere* Term, holder følgende implikasjoner:

$$a \in \mathsf{Term} \Rightarrow N \vdash Term(\bar{a})$$
$$a \notin \mathsf{Term} \Rightarrow N \vdash \neg Term(\bar{a})$$

Dersom t er en $\mathcal{L}_{NT}$-term, er altså $\ulcorner t \urcorner$ et gödeltall med i mengden Term. $\mathcal{L}_{NT}$-representasjonen av $\ulcorner t \urcorner$, $\overline{\ulcorner t \urcorner} = S^{\ulcorner t \urcorner}0$, kan da beviselig figurere i Δ-formelen '$Term(x)$'. Altså,

$$\begin{array}{lll} t \text{ er en } \mathcal{L}_{NT}\text{-term} & \Rightarrow \ulcorner t \urcorner \in \mathsf{Term} & \Rightarrow N \vdash Term(\overline{\ulcorner t \urcorner}) \\ t \text{ er ikke en } \mathcal{L}_{NT}\text{-term} & \Rightarrow \ulcorner t \urcorner \notin \mathsf{Term} & \Rightarrow N \vdash \neg Term(\overline{\ulcorner t \urcorner}). \end{array}$$

Følgende mengder er rekursive og *representerbare* av Δ-formler:

Mengde	**Formel**	**Beskrivelse**
Variabel	$Variabel(\bar{a})$	$\{a \mid a = \ulcorner v \urcorner, \text{for en variabel } v\}$
Term	$Term(\bar{c})$	$\{c \mid c = \ulcorner t \urcorner, \text{for en } \mathcal{L}_{NT}\text{-term } t\}$
Formel	$Formel(\bar{f})$	$\{f \mid f = \ulcorner \phi \urcorner, \text{for en } \mathcal{L}_{NT}\text{-formel } \phi\}$
Num	$Num(\bar{a}, y)$	$\{\langle a, y\rangle \mid y = \ulcorner \bar{a} \urcorner\}$
Sub	$Sub(\overline{\ulcorner \phi \urcorner}, \overline{\ulcorner x \urcorner}, \overline{\ulcorner t \urcorner}, y)$	$\{\langle \ulcorner \phi \urcorner, \ulcorner x \urcorner, \ulcorner t \urcorner, y\rangle \mid y = \ulcorner \phi^x_t \urcorner\}$
$\mathsf{Aksiom_N}$	$Aksiom_N(\bar{a})$	$\{a \mid a = \ulcorner \psi \urcorner \wedge \psi \in N\}$
$\mathsf{LogiskAksiom_N}$	$LogiskAksiom_N(\bar{a})$	$\{a \mid a = \ulcorner \psi \urcorner \wedge \psi \in \Lambda\}$
$\mathsf{Deduksjon_N}$	$Deduksjon_N(\bar{c}, \bar{f})$	$\{\langle c, f\rangle \mid c = \ulcorner D \urcorner \wedge f = \ulcorner \phi \urcorner\}$ der D er en N-deduksjon av ϕ

F.eks. er $\langle 2, 2^{11}3^{2^{11}3^{2^9}}\rangle \in \mathsf{Num}$ siden $\ulcorner \bar{2} \urcorner = \ulcorner SS0 \urcorner = 2^{11}3^{2^{11}3^{2^9}}$.

Vi trenger å vite hvordan formelen '$Deduksjon_N(\bar{c}, \bar{f})$' ser ut. Alle andre subformler i formelen er også Δ-formler.

$$\begin{aligned} & Deduksjon_N(c, f) \equiv \\ & Sekvenskode(c) \wedge Formel(f) \wedge \\ & (\exists l < c)\Big(SekvensLengde(c, l) \wedge IteSekvensElement(f, l, c) \wedge \\ & (\forall i \leq l)\Big[IteSekvensElement(e, i, c) \rightarrow \\ & \big(LogiskAksiom(e) \vee Aksiom_N(e) \vee Qregel(c, e, i) \vee PCregel(c, e, i)\big)\Big]\Big) \end{aligned}$$

Pent er det altså ikke!

La nå

$$\mathsf{Thm_N} = \{\ulcorner\phi\urcorner \mid N \vdash \phi\}$$

Det hadde vært fint hvis vi kunne finne en Δ-formel som representerte denne mengden. Vi vet at alle deduksjoner har endelig lengde. Hvis vi da kunne funnet en øvre grense a, så kunne vi latt

$$Thm_N(f) \Longleftrightarrow_{def} (\exists c \leq \bar{a})(Deduksjon(c, f))$$

Dessverre kan vi ikke sette en øvre grense som gjelder for alle N-deduksjoner. Vi må dermed nøye oss med

$$Thm_N(f) \Longleftrightarrow_{def} \exists c\,(Deduksjon(c, f))$$

som er en Σ-formel, og ikke en Δ-formel. At $\mathsf{Thm_N}$ ikke er en rekursiv mengde, og dermed ikke representerbar av en Δ-formel, skal vi se følger fra Gödels første ufullstendighetsteorem. Se vi står for døren og banker...

14 Gödel ante portas

Hvems skarpe sinn evner å skape en sang
verdig slike vidunderlige oppdagelser?

Lucretius, De rerum natura, V, 1-2.

Selvreferanse slik som 'denne setningen er falsk', burde være kjent fra før. Gödels briljante oppdagelse var at en også kan få logisk setninger til å referere til seg selv. Forskjellen fra logisk selvreferanse og selvreferansen i setningen over er dog at indeksikaluttrykket 'denne setningen' i setningen 'denne setningen er falsk' refererer nettopp til setningen 'denne setningen er falsk'. Vi skal se at en kan lage logiske setninger som intuitivt sier 'jeg er et teorem hviss jeg ikke er et teorem'. Dog, logisk selvreferanse fungerer litt anderledes enn vanlig selvreferanse i det at en formel ikke refererer til seg selv, men til gödeltallet til formelen, som er et *navn* på formelen. En kan altså lage en formler som sier 'jeg er et teorem hviss gödeltallet mitt beviselig ikke er navnet på et teorem'. I motsetning til vanlig selvreferanse, skaper dette ikke problemer mht. å evaluere setningen.

Selvreferanselemmaet under kalles ofte på engelsk 'fixed point lemma'. Siden alle de resterende teoremene følger fra denne besnærende setningen har vi tatt oss bryet verdt å pedantisk utlede den.

14.1 Selvreferanse - roten til alt ondt

Gödels selvreferanse lemma. La $\psi(v_1)$ være en $\mathcal{L}_{NT}$-formel med kun v_1 som fri variabel. Da finnes det en setning ϕ slik at

$$N \vdash \phi \leftrightarrow \psi(\overline{\ulcorner\phi\urcorner})$$

ϕ "sier" altså 'jeg har egenskapen ψ'.

Bevis. Vi skal konstruere setningen ϕ. Det ble over hevdet at mengdene Num, og Sub var rekursive. Siden Num og Sub oppfyller funksjonalitetskravet (dersom $\langle a, b\rangle \in \mathsf{Num}$ og $\langle a, c\rangle \in \mathsf{Num}$, da er $b = c$), kan disse mengdene sees på som funksjoner. Mengdene Num og Sub er da en funksjonene $\mathsf{Num} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, og $\mathsf{Sub} : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ slik at $\mathsf{Num}(n) = \ulcorner \bar{n} \urcorner$ og $\mathsf{Sub}(\ulcorner\alpha\urcorner, \ulcorner x\urcorner, \ulcorner t\urcorner) = \ulcorner \alpha^x_t \urcorner$. Vi har dermed fra representasjon av funksjoner lemmaet over at

$$\begin{array}{ll} \text{Lemma 1.} & N \vdash Num(\bar{a}, y) \leftrightarrow y = \overline{\mathsf{Num}(a)} \\ \text{Lemma 2.} & N \vdash Sub(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, z) \leftrightarrow y = \overline{\mathsf{Sub}(a, b, c)} \end{array}$$

La nå $\gamma(v_1)$ være formelen

$$\forall y \forall z \big[Num(v_1, y) \to (Sub(v_1, \bar{4}, y, z) \to \psi(z))\big]$$

og $\phi \equiv \gamma(\overline{m})$, der $m = \ulcorner \gamma(v_1) \urcorner$. Vi merker oss først at $\ulcorner v_1 \urcorner = 4$ og at antesedenten i '$\gamma(\overline{m})$' er '$Num(\bar{m}, y)$' samt at

$$\text{Lemma 3.} \quad \overline{\mathsf{Num}(m)} = \overline{\ulcorner \bar{m} \urcorner}$$

Siden $N \vdash Sub(\bar{m}, \bar{4}, \overline{\ulcorner \bar{m} \urcorner}, z) \leftrightarrow z = \overline{\mathsf{Sub}(m, 4, \ulcorner \bar{m} \urcorner)}$, har vi at

Lemma 4.

$$\begin{aligned} N \vdash Sub(\bar{m}, \bar{4}, \overline{\ulcorner \bar{m} \urcorner}, z) &\leftrightarrow Sub(\overline{\ulcorner \gamma(v_1) \urcorner}, \overline{\ulcorner v_1 \urcorner}, \overline{\ulcorner \bar{m} \urcorner}, z) \\ &\leftrightarrow z = \overline{\mathsf{Sub}(\ulcorner \gamma(v_1) \urcorner, \ulcorner v_1 \urcorner, \ulcorner \bar{m} \urcorner)} \\ &\leftrightarrow z = \overline{\ulcorner \gamma(v_1)^{v_1}_{\bar{m}} \urcorner} \\ &\leftrightarrow z = \overline{\ulcorner \gamma(v_1)^{v_1}_{\overline{\ulcorner \gamma(v_1) \urcorner}} \urcorner} \\ &\leftrightarrow z = \overline{\ulcorner \gamma(\overline{\ulcorner \gamma(v_1) \urcorner}) \urcorner} \\ &\leftrightarrow z = \overline{\ulcorner \phi \urcorner} \end{aligned}$$

Så z er altså representasjonen av gödeltallet til γ der en har substituert representasjonen av gödeltallet til γ for v_1, som igjen er lik representasjonen av gödeltallet til ϕ. Grøss!

Vi kan dermed vise $N \vdash \phi \leftrightarrow \psi(\overline{\ulcorner \phi \urcorner})$ ved følgende utledninger:

1.	ϕ	Antagelse
2.	$\forall y \forall z \big[Num(\bar{m}, y) \rightarrow [Sub(\bar{m}, \bar{4}, y, z) \rightarrow \psi(z)] \big]$	$\equiv, 1$
3.	$\forall y \forall z \big[y = \overline{\mathsf{Num}(m)} \rightarrow [Sub(\bar{m}, \bar{4}, y, z) \rightarrow \psi(z)] \big]$	Lemma 1
4.	$\forall y \forall z \big[y = \overline{\ulcorner \bar{m} \urcorner} \rightarrow [Sub(\bar{m}, \bar{4}, y, z) \rightarrow \psi(z)] \big]$	Lemma 3
5.	$\forall z \big[\overline{\ulcorner \bar{m} \urcorner} = \overline{\ulcorner \bar{m} \urcorner} \rightarrow [Sub(\bar{m}, \bar{4}, \overline{\ulcorner \bar{m} \urcorner}, z) \rightarrow \psi(z)] \big]$	Q, 4
6.	$\forall z \big[\overline{\ulcorner \bar{m} \urcorner} = \overline{\ulcorner \bar{m} \urcorner} \rightarrow [z = \overline{\mathsf{Sub}(m, 4, \ulcorner \bar{m} \urcorner)} \rightarrow \psi(z)] \big]$	Lemma 2
7.	$\forall z \big[\overline{\ulcorner \bar{m} \urcorner} = \overline{\ulcorner \bar{m} \urcorner} \rightarrow [z = \overline{\ulcorner \phi \urcorner} \rightarrow \psi(z)] \big]$	Lemma 4
8.	$\overline{\ulcorner \bar{m} \urcorner} = \overline{\ulcorner \bar{m} \urcorner} \rightarrow [\overline{\ulcorner \phi \urcorner} = \overline{\ulcorner \phi \urcorner} \rightarrow \psi(\overline{\ulcorner \phi \urcorner})]$	Q, 7
9.	$\overline{\ulcorner \bar{m} \urcorner} = \overline{\ulcorner \bar{m} \urcorner} \wedge \overline{\ulcorner \phi \urcorner} = \overline{\ulcorner \phi \urcorner}$	E1, Q
10.	$\psi(\overline{\ulcorner \phi \urcorner})$	PC, 8, 9

1.	$\psi(\overline{\ulcorner\phi\urcorner})$	Antagelse
2.	$x = z \to [\psi(x) \to \psi(z)]$	E3$^+$
3.	$\overline{\ulcorner\phi\urcorner} = z \to [\psi(\overline{\ulcorner\phi\urcorner}) \to \psi(z)]$	Q, 2
4.	$Sub(\bar{m}, \bar{4}, \overline{\ulcorner\bar{m}\urcorner}, z) \to [\psi(\overline{\ulcorner\phi\urcorner}) \to \psi(z)]$	Lemma 4
5.	$Sub(\bar{m}, \bar{4}, \overline{\ulcorner\bar{m}\urcorner}, z) \to \psi(z)$	PC, 1, 4
6.	$x = y \wedge z = z \to \big[[Sub(\bar{m}, \bar{4}, x, z) \to \psi(z)] \to [Sub(\bar{m}, \bar{4}, y, z) \to \psi(z)]\big]$	E3$^+$
7.	$\overline{\ulcorner\bar{m}\urcorner} = y \wedge z = z \to \big[[Sub(\bar{m}, \bar{4}, \overline{\ulcorner\bar{m}\urcorner}, z) \to \psi(z)] \to [Sub(\bar{m}, \bar{4}, y, z) \to \psi(z)]\big]$	Q, 6
8.	$\overline{\ulcorner\bar{m}\urcorner} = y \to [Sub(\bar{m}, \bar{4}, y, z) \to \psi(z)]$	PC, 5, 7
9.	$\overline{\mathsf{Num}(m)} = y \to [Sub(\bar{m}, \bar{4}, y, z) \to \psi(z)]$	Lemma 3
10.	$Num(\overline{m}, y) \to [Sub(\bar{m}, \bar{4}, y, z) \to \psi(z)]$	Lemma 1
11.	$\forall y \forall z \big(Num(\overline{m}, y) \to [Sub(\bar{m}, \bar{4}, y, z) \to \psi(z)]\big)$	Kvantorlemma
12.	ϕ	$\equiv, 11$

Vi ser her at dersom ψ er en Π-formel, da er ϕ beviselig ekvivalent med en Π-formel. Merk at lemmaet selv ikke setter noen kompleksitetskrav; for *enhver* formel $\psi(v_1)$, finnes det en setning ϕ slik at $N \vdash \phi \leftrightarrow \psi(\overline{\ulcorner\phi\urcorner})$.

Oppgave: Etterlign beviset over med

$$\gamma(v_1) \equiv \exists y \exists z \big[Num(v_1, y) \wedge Sub(v_1, \bar{4}, y, z) \wedge \psi(v_1)\big]$$

$\square$

14.2 Ufullstendighet med sannhet Gödel, Tarski og Turing

Vi trenger noen definisjoner til før vi går i gang med Gödels første ufullstendighetsteorem.

Teori. En *teori* T er en mengde setninger som er lukket under deduksjon: for enhver setning σ, $T \vdash \sigma \Rightarrow \sigma \in T$. Hvis A er en mengde setninger, da er *teorien til* A, $Th(A) = \{\sigma \mid A \vdash \sigma\}$.

Rekusivt aksiomatiserbar. En $\mathcal{L}_{NT}$-teori T sies å være *rekursivt aksiomatiserbar* dersom det finnes en mengde aksiomer A slik at

1. $T = Th(A)$
2. $\mathsf{Aksiom_A} =_{def} \{\ulcorner\alpha\urcorner \mid \alpha \in A\}$ er en rekursiv mengde.[42]

Vi kommer også til å trenge to lemma.

Substitusjon. Anta at ϕ er en $\mathcal{L}$-formel, x en variabel, t en $\mathcal{L}$-term, og at t er substituerbar for x i ϕ. Anta også at $s : Vars \to A$ er en tilordningsfunksjon og at $s' = s[x|\overline{s}(t)]$. Da er $\mathfrak{A} \vDash \phi^x_t[s] \iff \mathfrak{A} \vDash \phi[s']$.

Bevis. Induksjon $\square$

Lemmaet sier at en kan velge om en vil substituere i en formel, eller la tilordningsfunksjonen gjøre jobben så lenge t er en $\mathcal{L}$-term.

$\mathsf{Thm_A}$ er en rekursiv enumererbar mengde. Anta at A er en konsistent og rekursiv mengde aksiomer i språket $\mathcal{L}_{NT}$. Da er det alltid tilfellet at

$$f \in \mathsf{Thm_A} \Leftrightarrow \mathfrak{N} \vDash Thm_A(\overline{f}) \Leftrightarrow N \vdash Thm_A(\overline{f})$$

Bevis. Den første ekvivalensen er triviell siden 'Thm_A' åpenbart definerer $\mathsf{Thm_A}$. La oss derfor konsentrere oss om den andre ekvivalensen. Fra venstre til høyre følger fra sunnhetsteoremet. Andre veien er verre.

Dersom '$Thm_A(x)$' er en Σ-formel, følger dette fra Σ-kompletthetslemmaet. Problemet er at '$Aksiom_A(x)$' ikke trenger å være en Δ-formel. Siden $\mathsf{Aksiom_A}$ er en rekursiv mengde, finnes det en formel, '$Aksiom_A(x)$' som representerer mengden. Forskjellen på '$Deduksjon_N(x, y)$' og '$Deduksjon_A(x, y)$' er kun at vi har byttet ut '$Aksiom_N(x)$' med '$Aksiom_A(x)$', så '$Deduksjon_A(x, y)$' *definerer* åpenbart $\mathsf{Deduksjon_A}$. Vi må vise at den også *representerer* mengden. Hvis så er tilfellet, vil, ved substitusjonslemmaet, vi ha at for et eller annet kodetall c,

Lemma 5.

$$\begin{aligned} \mathfrak{N} \vDash Thm_A(\overline{f}) &\Leftrightarrow \mathfrak{N} \vDash Deduksjon_A(\overline{c}, \overline{f}) \\ &\Leftrightarrow \langle c, f\rangle \in \mathsf{Deduksjon_A} \\ &\Leftrightarrow f \in \mathsf{Thm_A} \end{aligned}$$

som igjen, siden '$Deduksjon_A(x, y)$' *representerer* $\mathsf{Deduksjon_A}$, er ekvivalent med at

$$(a) \quad N \vdash Deduksjon_A(\overline{c}, \overline{f}).$$

Siden $Thm_A(\overline{f}) \equiv \exists x[Deduksjon_A(x, \overline{f})]$, har vi at

[42] Merk forskjellen å være *rekursivt* aksiomatiserbar og aksiomatiserbar *simpliciter*.

$$(b) \quad N \vdash Thm_A(\overline{f}) \leftrightarrow \exists x[Deduksjon_A(x, \overline{f})]$$

Vi viser nå formelt at $(a) \wedge (b) \Rightarrow N \vdash Thm_A(\overline{f})$. Det vi trenger å vise er at vårt bevissystem er sterkt nok til å bevise formelen

$$Deduksjon_A(\overline{c}, \overline{f}) \to \exists x[Deduksjon_A(x, \overline{f})]$$

Ved deduksjonsteoremet er dette ekvivalent med å vise at

$$N \cup \{Deduksjon_A(\overline{c}, \overline{f})\} \cup \{\neg\exists x[Deduksjon_A(x, \overline{f})]\} \vdash \bot$$

1.	$Deduksjon_A(\overline{c}, \overline{f})$	Antagelse
2.	$\neg\exists x[Deduksjon_A(x, \overline{f})]$	Antagelse
3.	$\forall x \neg[Deduksjon_A(x, \overline{f})]$	$\equiv, 2$
4.	$\forall x \neg[Deduksjon_A(x, \overline{f})] \to \neg[Deduksjon_A(\overline{c}, \overline{f})]$	Q
5.	$\neg[Deduksjon_A(\overline{c}, \overline{f})]$	$\mathrm{PC}, 3, 4$
6.	$\bot$	$\mathrm{PC}, 1, 5$

Dermed vet vi at

$$(1) \quad \mathfrak{N} \vDash Thm_A(\overline{f}) \iff N \vdash Thm_A(\overline{f})$$

Det gjenstod altså bare å bevise dette... Vi skal altså vise at formelen '$Deduksjon_A(x, y)$' *representerer* $\mathsf{Deduksjon_A}$. Litt ettertanke vil vise at en formel representerer en mengde hviss formelen definerer mengden og er numerisk bestemt. Siden enhver delformel av '$Deduksjon_A(x, y)$' representerer hver sin rekursive mengde, er alle delformlene numerisk bestemt, og følgelig er også '$Deduksjon_A(x, y)$' numerisk bestemt - mengden av numerisk bestemte formler er lukket under negasjon, disjunksjon og bundne kvantorer. Siden vi allerede ble enige om at formelen definerer mengden, representerer altså '$Deduksjon_A(x, y)$' mengden $\mathsf{Deduksjon_A}$. $\square$

Gödels første ufullstendighetsteorem. Anta at A er en konsistent og rekursiv mengde aksiomer i språket $\mathcal{L}_{NT}$. Da finnes det en setning, θ, med minimum Π-kompleksitet slik at $\mathfrak{N} \vDash \theta$, og $A \nvdash \theta$.[43]

Bevis. Vi minner om at en mengde A er konsistent hviss $A \nvdash \bot$ og at $\mathsf{Thm_A} = \{\ulcorner\sigma\urcorner \mid A \vdash \sigma\}$. Vi antar at en fra A kan bevise alle aksiomene i N. Hvis ikke er beviset allerede over siden alle aksiomene i N er Π-former, og $\mathfrak{N} \vDash N$. Dersom $A \vdash N$ sier vi at A utvider N.

[43]Med unntak av Π-kompleksiteten, er dette ekvivalent med 'det finnes ingen konsisten rekursivt aksiomatiserbar teori T som er en aksiomatisering av $Th(\mathfrak{N})$'.

Siden selvreferanselemmaet gjelder for enhver formel $\psi(v_1)$, bruker vi den iallfall Π-komplekse formelen $\psi(v_1) \equiv \neg Thm_A(v_1)$:

$$(2) \quad N \vdash \theta \leftrightarrow \neg Thm_A(\overline{\ulcorner\theta\urcorner})$$

θ "sier" altså 'jeg er ikke et teorem', og er altså ekvivalent med en iallfall Π-kompleks setning.

Vi har da fra sunnhetsteoremet at enhver modell for N er en modell for '$\theta \leftrightarrow \neg Thm_A(\overline{\ulcorner\theta\urcorner})$'. Siden $\mathfrak{N} \models N$, er også $\mathfrak{N} \models \theta \leftrightarrow \neg Thm_A(\overline{\ulcorner\theta\urcorner})$. Dermed får vi følgende ekvivalenser:

$$\begin{array}{rcll} \mathfrak{N} \models \theta & \iff & \mathfrak{N} \not\models Thm_A(\overline{\ulcorner\theta\urcorner}) & \\ & \iff & \ulcorner\theta\urcorner \notin \mathsf{Thm_A} & \text{Lemma 5} \\ & \iff & A \nvdash \theta & \end{array}$$

Anta nå for kontradiksjon at $A \vdash \theta$ og $\mathfrak{N} \not\models \theta$. Siden $A \vdash \theta$ er $\ulcorner\theta\urcorner \in \mathsf{Thm_A}$, og dermed $\mathfrak{N} \models Thm_A(\overline{\ulcorner\theta\urcorner})$. Ved (1) over er da $N \vdash Thm_A(\overline{\ulcorner\theta\urcorner})$. Fra (2) har vi dermed at $N \vdash \neg\theta$, og siden A utvider N så er $A \vdash \neg\theta$. Vi antok at A er en konsistent mengde, så her har vi vår kontradiksjon. Dermed er $\mathfrak{N} \models \theta$, og $A \nvdash \theta$.

□

Gödels teorem over sier strengt tatt ikke at A er ufullstendig, kun at θ er sann og ikke bevisbar. Kanskje er '$\neg\theta$' bevisbar fra A[44]. Vi sa over at en mengde aksiomer A var komplett dersom for enhver setning σ, enten $A \vdash \sigma$, eller $A \vdash \neg\sigma$. Vi skal nå vise at θ er slik at $A \nvdash \theta$ og $A \nvdash \neg\theta$.

Ufullstendighet propper. Anta at A er en konsistent, rekursiv utvidelse av N. Dersom $\mathfrak{N} \models A$, da finnes det en setning θ slik at $A \nvdash \theta$ og $A \nvdash \neg\theta$.

Bevis. La A være en konsistent rekursiv utvidelse av N, og anta at $\mathfrak{N} \models A$. La θ være setningen i Gödels teorem over. Vi vet da at $\mathfrak{N} \models \theta$, og $A \nvdash \theta$. Anta nå for kontradiksjon at $A \vdash \neg\theta$. Fra sunnhetsteoremet følger det da at $\mathfrak{N} \models \neg\theta$ som motsier antagelsen at $\mathfrak{N} \models \theta$. Dermed $A \nvdash \neg\theta$, og A er ufullstendig. □

Turings teorem - Entscheidung. Dersom A er en rekursiv og konsistent mengde aksiomer i språket $\mathcal{L}_{NT}$ som utvider N, da er

$$\mathsf{Thm_A} = \{\ulcorner\sigma\urcorner \mid A \vdash \sigma\}$$

ikke representerbar i A, og derfor ikke en rekursiv mengde.[45]

[44]Her hadde Quines 'quasi-quotation' igjen kommet til sin rett!

[45]En mengde Γ er representerbar *i* A dersom det finnes en $\mathcal{L}_{NT}$-formel $\phi(\underset{\sim}{x})$ slik at

$$\begin{array}{ll} \forall \underset{\sim}{a} \in \Gamma & A \vdash \phi(\bar{\underset{\sim}{a}}) \\ \forall \underset{\sim}{a} \notin \Gamma & A \vdash \neg\phi(\bar{\underset{\sim}{a}}) \end{array}$$

Bevis. Anta for kontradiksjon at $\mathsf{Thm_A}$ er en rekursiv mengde. Det betyr at det finnes en formel $\gamma(v_1)$ som representerer mengden, altså at

$$\begin{array}{lll} (a) & \ulcorner\sigma\urcorner \in \mathsf{Thm_A} & \Rightarrow N \vdash \gamma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}) \\ (b) & \ulcorner\sigma\urcorner \notin \mathsf{Thm_A} & \Rightarrow N \vdash \neg\gamma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}) \end{array}$$

Vi bruker selvreferanseskjemaet:

$$N \vdash \theta \leftrightarrow \neg\gamma(\overline{\ulcorner\theta\urcorner})$$

Siden A utvider N har vi da at

$$(3) \quad A \vdash \theta \leftrightarrow \neg\gamma(\overline{\ulcorner\theta\urcorner})$$

Dermed får vi følgende implikasjoner:

$$\begin{array}{lll} A \vdash \theta & \Rightarrow \ulcorner\theta\urcorner \in \mathsf{Thm_A} & \\ & \Rightarrow A \vdash \gamma(\overline{\ulcorner\theta\urcorner}) & \gamma \text{ representerer } \mathsf{Thm_A} \\ & \Rightarrow A \vdash \neg\theta & \text{Selvreferanse, (3)} \\ & \Rightarrow A \nvdash \theta & A \text{ er konsistent} \\ & \Rightarrow \ulcorner\theta\urcorner \notin \mathsf{Thm_A} & \\ & \Rightarrow A \vdash \neg\gamma(\overline{\ulcorner\theta\urcorner}) & \gamma \text{ representerer } \mathsf{Thm_A} \\ & \Rightarrow A \vdash \theta & \text{Selvreferanse, (3)} \end{array}$$

Vi ser her at både $A \vdash \theta$ og $A \nvdash \theta$ leder til selvmotsigelser, og dermed må antagelsen at $\mathsf{Thm_A}$ er representerbar i A være gal. Ingen rekursiv og konsistent utvidelse av N gir altså en rekursiv teori. Dermed er heller ikke $\mathsf{Thm_N}$ rekursiv siden trivielt $N \vdash N$.

□

I essens sier dette at en ikke mekanisk kan avgjøre om en setning er et teorem eller ei. Dersom setningen er et teorem, da kan en få en automat til å verifisere dette, $\mathsf{Thm_A}$ er rekursiv enumererbar, men dersom en spør en slik automat om et ikke-teorem er et teorem, vil en aldri få et svar. Automaten vil sjekke større og større tall og se om disse er et teorem-gödeltall til formelen, men siden ingen tall er det vil automaten gå og gå og aldri komme fram til svaret. $\mathsf{Thm_A}$ er rekursiv enumererbar, så en turingmaskin kan liste opp alle tallene (men ikke i stigende rekkefølge). Ved definisjon av '$\ulcorner\urcorner$' kan vi dermed få automaten vår til å oversette ethvert tall til en formel. Men dersom vi gir den en formel hvis gödeltall ikke er med i $\mathsf{Thm_A}$, vil den måtte teste hvert tall i $\mathsf{Thm_A}$ for å se om det kan oversettes til formelen. Siden det finnes uendelig mange tall i $\mathsf{Thm_A}$, vil den aldri klare å stoppe. Den vil gå i en uendelig loop. Vi halvautomater kan iallfall for noen ikke-teoremer bekrefte at de ikke er teoremer, så vi er halvautomater og ikke automater?

Siden A utvider N garanterer det å ikke være representerbar i A at $\mathsf{Thm_A}$ ikke er rekursiv (representerbar i N).

Vi unner oss litt pause og slapper av med et litt mer intuitivt teorem som vi skal bruke for å gjøre et nytt bevis for Gödels første ufullstendighetsteorem.

Fullstendig, rekursive aksiommengder. Enhver konsistent, fullstendig og rekursivt aksiomatiserbar teori T er rekursiv.

Bevis. La oss bli enige om hva teoremet sier først. Dersom T er en rekursivt aksiomatiserbar teori, finnes det en mengde aksiomer A slik at $T = \{\sigma \mid A \vdash \sigma\}$ og $\mathsf{Aksiom_A} = \{\ulcorner\sigma\urcorner \mid \sigma \in A\}$ er en rekursiv mengde. T er fullstendig dersom enten $\sigma \in T$ eller $\neg\sigma \in T$ for enhver setning σ. Hvis vi lar $\neg T$ være mengden av alle setninger som ikke er med i T, er altså $T \cup \neg T$ mengden av alle velformulerte setninger. T er rekursiv dersom vi for enhver setning ϕ kan avgjøre om $\phi \in T$ eller $\phi \notin T$. Hvis vi nå lar $\ulcorner T\urcorner$ være mengden av alle kodetall til setningene i T, er oppgaven altså å vise at $\ulcorner T\urcorner$ er en rekursiv mengde.

Siden mengden av kodetall til velformulerte setninger er representert av Δ-formelen '$Formel(x)$', er mengden av alle kodetall til ikke velformulerte setninger representert av den Δ-ekvivalente formelen '$\neg Formel(x)$', og dermed er $\mathsf{IkkeFormel}$ en rekursiv mengde. Vi lar nå $\ulcorner\neg T\urcorner$ være mengden av alle kodetall til setninger som ikke er med i T. Hvis vi nå kan vise at $\ulcorner T\urcorner$ og $\ulcorner\neg T\urcorner$ er rekursivt enumererbare vil $\mathbb{N} \setminus \ulcorner T\urcorner = \mathsf{IkkeFormel} \cup \ulcorner\neg T\urcorner$ være rekursiv enumererbar. Siden en mengde A er rekursiv hviss både A og $\mathbb{N} \setminus A$ er rekursivt enumererbare, vil vi da være i mål.

Vi vet fra før at dersom A er en rekursiv konsistent mengde aksiomer, at $\mathsf{Thm_A}$ en rekursiv enumererbar mengde. $\ulcorner T\urcorner$ er altså rekursiv enumererbar. Alt vi trenger å vise er altså at $\ulcorner\neg T\urcorner$ er rekursiv enumererbar, som er ekvivalent med å finne en måte å liste opp alle tallene i $\ulcorner\neg T\urcorner$ på.

Siden T antas å være fullstendig vet vi at $\ulcorner\theta\urcorner \in \ulcorner T\urcorner$ hviss $\ulcorner\neg\theta\urcorner \notin \ulcorner T\urcorner$ for enhver setning θ. Siden vi vet at $\ulcorner T\urcorner$ er rekursivt enumererbar, modifisere vi turingmaskinen M som svarer 'ja' for hver tall $\ulcorner\theta\urcorner \in \ulcorner T\urcorner$ til maksinen M^* slik at M^* skriver ut tallene $2^1 3^{\ulcorner\theta\urcorner}$ for ethver tall $\ulcorner\theta\urcorner$ slik at M svarer 'ja' ved input $\ulcorner\theta\urcorner$. Vi vet fra definisjonen av funksjonen $\ulcorner\urcorner$ at $2^1 3^{\ulcorner\theta\urcorner} = \ulcorner\neg\theta\urcorner$, så M^* lister mao. opp gödeltallet til negasjonen av alle formlene i T. Dermed er både $\ulcorner T\urcorner$ og $\ulcorner\neg T\urcorner$ rekursivt enumererbare, og dermed er $\ulcorner T\urcorner$ en rekursiv mengde som var det vi skulle vise. □

Gödels første ufullstendighetsteorem - rekursiv versjon. Enhver konsistent og rekursiv utvidelse $N \subseteq A$ gir en ufullstendig teori $T = Th(A)$.

Bevis. Vi har sett at enhver konsistent, fullstendig og rekursivt aksiomatiserbar teori selv er rekursiv. Ved Turings teorem og teoremet over er $\mathsf{Thm_A}$ en rekursiv enumererbar, men ikke rekursiv mengde. Dermed finnes ingen komplett, konsistent og rekursiv utvidelse av N, så $Th(A)$ er ufullstendig for enhver slik utvidelse.

$\square$

Tarskis teorem. Mengden $\mathsf{SannI}\mathfrak{N} = \{\ulcorner\alpha\urcorner \mid \mathfrak{N} \models \alpha\}$ er ikke definerbar i $\mathfrak{N}$.

Bevis. Husk at mengden $\mathsf{SannI}\mathfrak{N} \subseteq \mathbb{N}$ er definerbar hviss det finnes en $\mathcal{L}_{NT}$-formel $\phi(x)$ slik at

$$\begin{array}{ll} \forall\ulcorner\alpha\urcorner \in \mathsf{SannI}\mathfrak{N} & \mathfrak{N} \models \phi(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner}) \\ \forall\ulcorner\alpha\urcorner \notin \mathsf{SannI}\mathfrak{N} & \mathfrak{N} \models \neg\phi(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner}) \end{array}$$

og at

$$\begin{array}{l} Th(\mathfrak{N}) = \{\alpha \mid \mathfrak{N} \models \alpha\} \\ \mathsf{Thm}_{Th(\mathfrak{N})} = \{\ulcorner\alpha\urcorner \mid Th(\mathfrak{N}) \vdash \alpha\} \end{array}$$

Dermed har vi at

$$Th(\mathfrak{N}) \vdash \alpha \iff \mathfrak{N} \models \alpha$$

og

$$\mathsf{SannI}\mathfrak{N} = \mathsf{Thm}_{Th(\mathfrak{N})}$$

Formelen ϕ definere $\mathsf{SannI}\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{N}$ hviss ϕ representerer $\mathsf{Thm}_{Th(\mathfrak{N})}$ i $Th(\mathfrak{N})$. I formler:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall\ulcorner\alpha\urcorner \in \mathsf{SannI}\mathfrak{N} & \mathfrak{N} \models \phi(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner}) \\ \forall\ulcorner\alpha\urcorner \notin \mathsf{SannI}\mathfrak{N} & \mathfrak{N} \models \neg\phi(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner}) \end{array} \right\}$$
$$\Updownarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall\ulcorner\alpha\urcorner \in \mathsf{Thm}_{Th(\mathfrak{N})} & Th(\mathfrak{N}) \vdash \phi(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner}) \\ \forall\ulcorner\alpha\urcorner \notin \mathsf{Thm}_{Th(\mathfrak{N})} & Th(\mathfrak{N}) \vdash \neg\phi(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner}) \end{array} \right\}$$

Men $Th(\mathfrak{N})$ er en konsistent mengde av aksiomer som utvider N, dermed er, ved Turings teorem, $\mathsf{Thm}_{Th(\mathfrak{A})}$ ikke en rekursiv mengde, og dermed kan $\mathsf{SannI}\mathfrak{N}$ ikke være definerbart i $\mathfrak{N}$. $\square$

Det finnes altså ikke et sannhetspredikat, ingen formel $SannI\mathfrak{N}(x)$, slik at for enhver $\mathcal{L}_{NT}$-formel α, slik at

$$\mathfrak{N} \models \alpha \leftrightarrow SannI\mathfrak{N}(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner})$$

14.3 Ufullstendighet uten sannhet ω-konsistens og Rosser

Gödels ufullstendighetsteorem sier at det finnes en setning θ slik at $\mathfrak{N} \models \theta$ og $A \nvdash \theta$ for konsistent og rekursiv mengde aksiomer A. Teoremet krever altså ikke at $\mathfrak{N} \models A$. Videre ser vi at kompletthetsteoremet gir følgende implikasjon:

$$A \nvdash \theta \Longrightarrow \exists\mathfrak{A}[\mathfrak{A} \models A \wedge \mathfrak{A} \not\models \theta]$$

Også fra dette ser vi at vi ikke trenger å kreve at $\mathfrak{N} \models A$. Kompletthets-implikasjonen av teoremet sier altså kun at $\mathfrak{N} \models \theta$ og at det finnes en modell $\mathfrak{A}$, slik at $\mathfrak{A} \models A$ og $\mathfrak{A} \not\models \theta$. Vi skal nå se at en ikke trenger å anta at $\mathfrak{N} \models A$ for å bevise at A er ufullstendig.

ω-konsistens. En $\mathcal{L}_{NT}$-teori T sies å være ω-**inkonsistent** dersom det finnes en formel $\phi(x)$ slik at $T \vdash \exists x \phi(x)$, men $\forall n \in \mathbb{N}, T \vdash \neg\phi(\overline{n})$. Ellers er T ω-**konsistent**

ω-konsistens $\Rightarrow$ konsistens. Dersom en teori T er ω-konsistent, da er T konsistent.

Bevis. Vi viser det kontrapositive. Anta at T er inkonsistent, altså at $T \vdash \bot$. Siden T er inkonsistent, kan vi bevise hva som helst, også $T \vdash \exists x \phi(x)$, og $\forall n \in \mathbb{N}, T \vdash \neg\phi(\overline{n})$. Dermed er T ω-inkonsistent. □

Merk også at $\mathfrak{N} \models T \Rightarrow T$ er ω-konsistent $\Rightarrow T$ er konsistent. ω-konsistens er en strengere betingelse, i den forstand at konsistens ikke impliserer ω-konsistens. Vi repeterer litt modellteori:

Konsistens $\not\Rightarrow$ ω-konsistens. En teori T kan være konsistent, men ω-inkonsistent.

Bevis. La $\mathfrak{A}$ være en ikke-standard modell, der

$$A = \mathbb{N} \cup \{\omega\}, \text{ og } <^{\mathfrak{A}} = \{\langle a, b\rangle \mid a < b\} \cup \{\langle \omega, \omega\rangle\}$$

I $\mathfrak{A}$ er altså elementet ω strengt større en alle tall, inkludert seg selv. Hvis vi nå lar $\phi(x) \equiv x < x$. For enhver $n \in \mathbb{N}$ så er da $\mathfrak{A} \models \neg\phi(\overline{n})$, og $\mathfrak{A} \models \exists x \phi(x)$. La nå $T = Th(\mathfrak{A}) = \{\alpha \mid \mathfrak{A} \models \alpha\}$. Dermed er $\exists x \phi(x) \in T$ og $\forall n \in \mathbb{N}, \neg\phi(\overline{n}) \in T$, og T er ω-inkonsistent. Det gjenstår nå å vise at T er konsistent. Fra sunnhet og kompletthet har vi at

$$T \nvdash \bot \iff T \not\models \bot \iff \exists \mathfrak{B}[\mathfrak{B} \models T \wedge \mathfrak{B} \not\models \bot]$$

Hvis vi lar $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ har vi en slik modell.

□

ω-konsistens og ufullstendige aksiommengder. Dersom A er en ω-konsistent, og rekursiv utvidelse av N, da er A ufullstendig.

Bevis. Vi antar betingelsene i teoremet og lar θ som vanlig være slik at

$$(2) \quad N \vdash \theta \leftrightarrow \neg Thm_A(\ulcorner \theta \urcorner)$$

Vi vet fra før at $\mathfrak{N} \models \theta$ og $A \nvdash \theta$. Målet er å vise at $A \nvdash \neg\theta$ uten å anta at $\mathfrak{N} \models A$.

Anta for kontradiksjon at $A \vdash \neg\theta$. Siden A er en utvidelse av N har vi da at $A \vdash Thm_A(\overline{\ulcorner\theta\urcorner})$ og $A \vdash \exists v_1[Deduksjon_A(v_1, \overline{\ulcorner\theta\urcorner})]$ siden

$$(4) \quad Thm_A(\overline{\ulcorner\theta\urcorner}) \equiv_{def} \exists v_1[Deduksjon_A(v_1, \overline{\ulcorner\theta\urcorner})]$$

Siden $A \nvdash \theta$, vet vi også at $\forall n \in \mathbb{N}$, at n ikke koder en deduksjon av θ (ellers ville $A \vdash \theta$), altså

$$\forall n \in \mathbb{N}, \langle n, \ulcorner\theta\urcorner\rangle \notin \mathsf{Deduksjon_A}$$

Husk at

$$\mathsf{Deduksjon_A} = \{\langle\ulcorner D\urcorner, \ulcorner\theta\urcorner\rangle \mid D \text{ er et } A\text{-bevis for } \theta\}$$

Siden formelen $Deduksjon_A(x, y)$ er en Δ-formel som *representerer* mengden $\mathsf{Deduksjon_A}$, har vi at

$$\forall n \in \mathbb{N}, N \vdash \neg Deduksjon_A(\overline{n}, \overline{\ulcorner\theta\urcorner})$$

Siden A er en utvidelse av N har vi også at

$$(5) \quad \forall n \in \mathbb{N}, A \vdash \neg Deduksjon_A(\overline{n}, \overline{\ulcorner\theta\urcorner})$$

Fra (4) og (5) ser vi at A er ω-inkonsistent, som motsier antagelsen. Vi slutter dermed at $A \nvdash \neg\theta$, og dermed at A er ufullstendig.

□

Vi skal nå se at en kan jenke litt på krava, og kun kreve at A er konsistent, og ikke ω-konsistent som over.

Rossers teorem. Hvis A er en rekursiv og konsistent mengde $\mathcal{L}_{NT}$-aksiomer som utvider N, da er A ufullstendig.

Bevis. Vi bruker selvreferanselemmaet for å konstruere en setning ρ slik at

$$N \vdash \Big[\rho \leftrightarrow \forall x\big[Deduksjon_A(x, \overline{\ulcorner\rho\urcorner}) \rightarrow (\exists y < x)(Deduksjon_A(y, \overline{\ulcorner\neg\rho\urcorner})\big]\Big]$$

ρ sier altså 'for alle bevis i mitt navn, '$\ulcorner\rho\urcorner$', finnes det et mindre bevis for min motpart, $\ulcorner\neg\rho\urcorner$'.

Vi skal vise at $A \nvdash \rho$ og $A \nvdash \neg\rho$, altså at A er ufullstendig.

Anta først som kontradiksjon at $A \vdash \rho$. Siden $Deduksjon_A(x, y)$ representerer $\mathsf{Deduksjon_A}$ og $A \vdash N$, er altså antagelsen $A \vdash Deduksjon_A(\bar{a}, \overline{\ulcorner\rho\urcorner})$ for et eller annet tall a. Siden A er antatt konsistent er da

$$A \vdash \neg Deduksjon_A(\bar{n}, \overline{\ulcorner\neg\rho\urcorner})$$

for alle $n \in \mathbb{N}$ og da ved Rossers korollar og regelen PC

$$(c) \quad A \vdash \neg(\exists y < \bar{a}) Deduksjon_A(\bar{n}, \overline{\ulcorner\neg\rho\urcorner})$$

Vi får dermed følgende utledning:

1.	ρ	Antagelse
2.	$Deduksjon_A(\bar{a}, \overline{\ulcorner \rho \urcorner})$	$\equiv, 1$
3.	$\forall x\big[Deduksjon_A(x, \overline{\ulcorner \rho \urcorner}) \to (\exists y < x)(Deduksjon_A(y, \bar{2}^{\bar{1}}\bar{3}^{\overline{\ulcorner \rho \urcorner}})\big]$	Selvref., 1
4.	$Deduksjon_A(\bar{a}, \overline{\ulcorner \rho \urcorner}) \to (\exists y < \bar{a})(Deduksjon_A(y, \bar{2}^{\bar{1}}\bar{3}^{\overline{\ulcorner \rho \urcorner}})$	$Q, 3$
5.	$(\exists y < \bar{a})(Deduksjon_A(y, \bar{2}^{\bar{1}}\bar{3}^{\overline{\ulcorner \rho \urcorner}})$	$PC, 2, 4$
6.	$\neg(\exists y < \bar{a})Deduksjon_A(\bar{n}, \bar{2}^{\bar{1}}\bar{3}^{\overline{\ulcorner \rho \urcorner}})$	(c)
7.	$\perp$	$PC, 5, 6$

Anta nå for kontradiksjon at $A \vdash \neg\rho$. Antagelsen er mao.

$$A \vdash Deduksjon_A(\bar{b}, \overline{\ulcorner \rho \urcorner})$$

for et eller annet tall b. Av samme grunn som over har vi da at

$$A \vdash \neg Deduksjon_A(\bar{n}, \overline{\ulcorner \rho \urcorner})$$

for alle $n \in \mathbb{N}$ og da ved Rossers korollar og regelen PC

$$(d) \quad A \vdash \neg\exists x(x \leq \bar{b} \wedge Deduksjon_A(x, \overline{\ulcorner \rho \urcorner}))$$

Vi får nå følgende utledning:

1.	$\neg\rho$	Antagelse
2.	$Deduksjon_A(\bar{b}, \overline{\ulcorner\rho\urcorner})$	$\equiv, 1$
3.	$\neg\forall x\big[Deduksjon_A(x, \overline{\ulcorner\rho\urcorner}) \rightarrow$ $(\exists y < x)(Deduksjon_A(y, \overline{\ulcorner\rho\urcorner})\big]$	$\text{Selvref.}, 1$
4.	$\exists x\big[Deduksjon_A(x, \overline{\ulcorner\rho\urcorner}) \wedge$ $\forall y(y < x \rightarrow \neg Deduksjon_A(y, \bar{2}^{\bar{1}}\bar{3}^{\overline{\ulcorner\rho\urcorner}})\big]$	$\equiv, 3$
5.	$\exists x\big[Deduksjon_A(x, \overline{\ulcorner\rho\urcorner}) \wedge$ $(\bar{b} < x \rightarrow \neg Deduksjon_A(\bar{b}, \overline{\ulcorner\rho\urcorner})\big]$	Q^+
6.	$\exists x\big[Deduksjon_A(x, \overline{\ulcorner\rho\urcorner})\big] \wedge$ $\big[(x \leq \bar{b} \vee \neg Deduksjon_A(\bar{b}, \overline{\ulcorner\rho\urcorner})\big]$	$\equiv, 5$
7.	$\exists x\Big[\big[Deduksjon_A(x, \overline{\ulcorner\rho\urcorner}) \wedge \exists x(x \leq \bar{b})\big] \vee$ $\big[Deduksjon_A(x, \overline{\ulcorner\rho\urcorner}) \wedge \neg Deduksjon_A(\bar{b}, \overline{\ulcorner\rho\urcorner})\big]\Big]$	$\text{PC}, 6$
8.	$\exists x\big[Deduksjon_A(x, \overline{\ulcorner\rho\urcorner}) \wedge \exists x(x \leq \bar{b})\big] \vee$ $\exists x\big[Deduksjon_A(x, \overline{\ulcorner\rho\urcorner}) \wedge \neg Deduksjon_A(\bar{b}, \overline{\ulcorner\rho\urcorner})\big]$	$\text{Kvant.dist.}(4), 7$
9.	$\exists x\big[Deduksjon_A(x, \overline{\ulcorner\rho\urcorner}) \wedge \exists x(x \leq \bar{b})\big] \vee$ $\Big[\exists x\big[Deduksjon_A(x, \overline{\ulcorner\rho\urcorner})\big] \wedge \neg Deduksjon_A(\bar{b}, \overline{\ulcorner\rho\urcorner})\Big]$	$\text{Preneks }(4), 8$
10.	$\exists x\big[x \leq \bar{b} \wedge Deduksjon_A(x, \overline{\ulcorner\rho\urcorner})\big]$	$\text{PC}, 2, 9$
12.	$\neg\exists x(x \leq \bar{b} \wedge Deduksjon_A(x, \overline{\ulcorner\rho\urcorner}))$	(d)
13.	$\perp$	$\text{PC}, 9, 10$

$\square$

14.4 Gödels andre ufullstendighetsteorem

Vi nærme oss slutten på visa, og visa slutter med at konsistens ikke er bevisbart. David Hilbert foreslo på den internasjonale kongressen for matematikere i Paris i 1900 23 problemer som han mente matematikere burde prøve å løse i løpet av de neste hundre årene. Matematikkens konsistens var det andre problemet:

> But above all I wish to designate the following as the most important among the numerous questions which can be asked with regard to the axioms: *To prove that they are not contradictory, that is, that a finite number of logical steps based upon them can never lead to contradictory results.*[46]

Svaret kom i 1931 som teorem XI i Gödels artikkel 'Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I':

> Let κ be any recursive consistent class of formulas; then the sentential formula stating that κ is consistent is not κ-provable; in particular, the consistency of P is not provable in P, provided P is consistent (in the opposite case, of course, every proposition is provable [in P]).[47]

Det er ikke noe galt i å tenke seg et bevis for aritmetikkens konsistens, problemet viser seg å heller være at aritmetikken ikke selv kan bevise dette. Vi skal vise nettopp dette ved først å utvide aksiomene våre ved å inkludere induksjonsaksiomet for første ordens logikk. Den nye aksiommengden, PA, er aksiomene for *Peano aritmetikk*.

Peano aritmetikk. Aksiomene for PA er N pluss induksjon*skjemaet*:

$$\Big[\phi(0) \wedge \forall x[\phi(x) \rightarrow \phi(Sx)]\Big] \rightarrow \forall x \phi(x)$$

for enhver $\mathcal{L}_{NT}$-formel ϕ med minst x som fri variabel.

Det finnes mange teorier mellom N og PA. Forskjellen er hvilke induksjonsformler som er tillatt. Vi trenger kun å anta at teorien har et aksiomskjema for minst Σ_1-komplekse formler. Vi kaller aksiommengden N pluss induksjonsskjemaet for Σ_1-formler for $I\Sigma_1$. Vi kommer i de følgende til å la T og S være slike aksiommengder. Vi aksepterte for en tid tilbake at N var en rekursiv mengde aksiomer. Nå fordrer vi leseren til å akseptere at T er en rekursiv aksiomatisert utvidelse av N. Grunnen til at vi bruker T er at Hilbert-Bernays-Löb betingelsene, holder i T for enhver formel ϕ og ψ:

(D1) $T \vdash \phi \Rightarrow T \vdash Thm_T(\overline{\ulcorner \phi \urcorner})$

(D2) $T \vdash Thm_T(\overline{\ulcorner \phi \urcorner}) \rightarrow Thm_T(\overline{\ulcorner Thm_T(\overline{\ulcorner \phi \urcorner}) \urcorner})$

(D3) $T \vdash \Big[\big[Thm_T(\overline{\ulcorner \phi \urcorner}) \wedge Thm_T(\overline{\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner})\big] \rightarrow Thm_T(\overline{\ulcorner \psi \urcorner})\Big]$

Vi godtar disse tre påstandene om T uten bevis, og minner om at

$$\bot \equiv [\forall x(x = x)] \wedge \neg \forall x(x = x)]$$

[46]Hilbert, David. 'Mathematische Probleme'. §38.

[47][10], s. 193. 'P' står for Russells og Whiteheads *Principia Matematica*.

I det følgende er $Con_T \equiv \neg Thm_T(\overline{\ulcorner\bot\urcorner})$, som intuitivt skal si at T er konsistent.[48]

Sant konsistent hviss konsistent.

$$\mathfrak{N} \vDash Con_T \iff T \nvdash \bot$$

Bevis. Hvis T ikke er konsistent kan en bevise hva som helst, inkludert $\neg Con_T$. Siden $\mathfrak{N} \vDash T$ følger det da, via sunnhetsteoremet, at $\mathfrak{N} \nvDash Con_T$. Dersom T er konsistent, da finnes det ikke et bevis for $\bot$, så $\ulcorner\bot\urcorner \notin \mathsf{Thm_T}$. Siden for enhver formel θ

$$\mathfrak{N} \vDash Thm_T(\overline{\ulcorner\theta\urcorner}) \iff \ulcorner\theta\urcorner \in \mathsf{Thm_T}$$

er $\mathfrak{N} \nvDash Thm_T(\overline{\ulcorner\bot\urcorner})$, og dermed $\mathfrak{N} \vDash Con_T$. $\square$

Utvidet selvreferanse. Enhver utvidelse T av N tilfredsstiller selvreferanselemmaet. Altså for enhver $\mathcal{L}_{NT}$-formel $\psi(v_1)$ med kun v_1 som fri variabel, så finnes det en setning ϕ slik at

$$T \vdash \phi \leftrightarrow \psi(\overline{\ulcorner\phi\urcorner})$$

Bevis. Siden $T \vdash N$ har vi trivielt at siden $N \vdash \phi \leftrightarrow \psi(\overline{\ulcorner\phi\urcorner})$ for enhver formel $\psi(v_i)$, at $T \vdash \phi \leftrightarrow \psi(\overline{\ulcorner\phi\urcorner})$. $\square$

Gödels andre ufullstendighetsteorem. Enhver konsistent og rekursiv utvidelse T av N som tilfredsstiller (D1)-(D3) kan ikke bevise sin egen konsistens. I symboler:

$$T \nvdash \bot \Longrightarrow T \nvdash Con_T$$

Bevis. Anta at $T \nvdash \bot$. Vi bruker det utvidede selvreferanselemmaet:

$$T \vdash \theta \leftrightarrow \neg Thm_T(\overline{\ulcorner\theta\urcorner})$$

Vi vet at $T \nvdash \theta$ siden T er en rekursiv konsistent utvidelse av N. Vi skal vise at

$$T \vdash Con_T \rightarrow \theta$$

---

[48] Det går an å studere bevisbarhet i en modal kontekst, såkalt *bevisbarhetslogikk*. En lar 'Thm_T' være $\Box_T$-operatoren. Konsistens kan da uttrykkes $\neg\Box_T\bot$. De tre betingelsene bli:

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{D1}') & T \vdash \phi \Rightarrow T \vdash \Box_T\phi \\ (\mathrm{D2}') & T \vdash \Box_T\phi \rightarrow \Box_T\Box_T\phi \\ (\mathrm{D3}') & T \vdash \Box_T\phi \wedge \Box_T(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \Box_T\psi \end{array}$$

(D1) holder trivielt også i N. (D2) formaliserer (D1) mens (D3) formaliserer modus ponens. Vi skal bruke denne notasjonen siden for å behjelpe leseligheten.

1.	$Thm_T(\overline{\ulcorner\theta\urcorner}) \to Thm_T(\overline{\ulcorner Thm_T(\overline{\ulcorner\theta\urcorner})\urcorner})$	D2
2.	$\theta \leftrightarrow \neg Thm_T(\overline{\ulcorner\theta\urcorner})$	Selvref.lemma
3.	$Thm_T(\overline{\ulcorner\theta\urcorner}) \to \neg\theta$	PC, 2
4.	$Thm_T(\overline{\ulcorner Thm_T(\overline{\ulcorner\theta\urcorner}) \to \neg\theta\urcorner})$	D1, 3
5.	$Thm_T(\overline{\ulcorner Thm_T(\overline{\ulcorner\theta\urcorner})\urcorner}) \to Thm_T(\overline{\ulcorner\neg\theta\urcorner})$	D3, PC, 4
6.	$Thm_T(\overline{\ulcorner\theta\urcorner}) \to Thm_T(\overline{\ulcorner\neg\theta\urcorner})$	PC, 1, 5
7.	$\theta \to (\neg\theta \to \bot)$	PC
8.	$Thm_T(\overline{\ulcorner\theta \to (\neg\theta \to \bot)\urcorner})$	D1, 7
9.	$Thm_T(\overline{\ulcorner\theta\urcorner}) \to Thm_T(\overline{\ulcorner\neg\theta \to \bot\urcorner})$	D3, PC, 8
10.	$Thm_T(\overline{\ulcorner\theta\urcorner}) \to \left[Thm_T(\overline{\ulcorner\neg\theta\urcorner}) \to Thm_T(\overline{\ulcorner\bot\urcorner})\right]$	D3, PC, 9
11.	$Thm_T(\overline{\ulcorner\theta\urcorner}) \to Thm_T(\overline{\ulcorner\bot\urcorner})$	PC, 6, 10
12.	$\neg Thm_T(\overline{\ulcorner\bot\urcorner}) \to \theta$	PC, 2, 11
13.	$Con_T \to \theta$	$\equiv, 12$

Anta nå at $T \vdash Con_T$ Fra utledningen over har vi da at $T \vdash \theta$. Siden θ er en gödelsetning vet vi at $T \nvdash \theta$, så $T \nvdash Con_T$. Vi har dermed vist at

$$PA \nvdash \bot \Rightarrow PA \nvdash Con_T$$

□

For at neste utledningen skal bli litt mer oversiktelig, bruker vi at

$$Thm_T(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \equiv \Box\psi$$

der T er en utvidelse av N som oppfyller (D1)-(D3).[49]

Löbs teorem.

$$T \vdash \Box\psi \to \psi \Longrightarrow T \vdash \psi$$

altså

$$T \vdash Thm_T(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \to \psi \Longrightarrow T \vdash \psi$$

Bevis. Vi bruker selvreferanselemmaet med setningen $\Box(x) \to \psi$, altså

$$T \vdash \phi \leftrightarrow (\Box\phi \to \psi)$$

[49]Beviset for det neste teoremet er en opprenset versjon av beviset i [4].

1.	$\Box\psi \to \psi$	Antagelse
2.	$\phi \leftrightarrow (\Box\phi \to \psi)$	Selvref.
3.	$\phi \to (\Box\phi \to \psi)$	PC, 2
4.	$\Box\phi \land \Box(\phi \to (\Box\phi \to \psi)) \to \Box(\Box\phi \to \psi)$	D3
5.	$\Box(\phi \to (\Box\phi \to \psi))$	D1, 3
6.	$\Box\phi \to \Box(\Box\phi \to \psi)$	PC, $4, 5$
7.	$\Box\Box\phi \land \Box(\Box\phi \to \psi) \to \Box\psi$	D3
8.	$\Box\phi \land \Box\Box\phi \to \Box\psi$	PC, $6, 7$
9.	$\Box\phi \to \Box\Box\phi$	D2
10.	$\Box\phi \to \Box\psi$	PC, $8, 9$
11.	$\Box\phi \to \psi$	PC, $1, 10$
12.	ϕ	PC, $2, 11$
13.	$\Box\phi$	D1, 12
14.	ψ	PC, $11, 13$

□

Hvis vi nå lar $\psi \equiv \bot$ får vi følgende:

Löbs teorem impliserer Gödels andre. *Bevis.*

1.	Con_T	
2.	$\neg\Box\bot$	$\equiv, 1$
3.	$\Box\bot \to \bot$	PC, 2
4.	$\bot$	Löbs teorem, 3

Ved deduksjonsteoremet er altså '$Con_T \to \bot$' en bevisbar setning i enhver utvidelse T av N som oppfyller (D1)-(D3). Det er lett å se at dette impliserer metautsagnet 'dersom $T \vdash Con_T$ da er $T \vdash \bot$'. □

Vi går nå gjennom noen enkle konsekvenser av Gödels teoremer som forhåpentligvis bidrar til å poengtere hva teoremene impliserer. Gödels andre ufullstendighetsteorem sier at fra enhver rekursiv konsistent (D1)-(D3) utvidese T av N, så kan en ikke bevise at $Th(T)$ ikke inneholder '$\bot$'. Kunne det hende at vi kan bevise dette *om* T ved å bruke $S \subset T$ eller $T \subset S$?

Ingen delteori av T beviser at S er konsistent. Anta at $N \subseteq T \subseteq S$ og $T \nvdash \bot$. Da er $T \nvdash Con_S$.

Bevis. La oss anta at T er formulert i et språk som er tilstrekkelig til å uttrykke setningn 'Con_S'. Vi kan la T være en delteori av S i to betydninger. Den enkleste er å la alle aksiomene i T og S være aksiomer i samme logikk, klassisk logikk. Den andre måten er å la $T \subseteq S$ der $Th(T)$ er mengden av alle setninger som en kan dedusere fra T i en annen logikk med et svakere bevissystem, f.eks. intuisjonistisk logikk. I begge tilfeller er det trivielt at vi ikke kan bevise at S er konsistent siden, i klassisk logikk, enhver setning bevisbar i $T \subset S$ er bevisbar i S, og dermed, ved modus tollens, siden 'Con_S' ikke er bevisbar i S er setningen heller ikke bevisbar i T. Dersom nå T er formulert i en annen svakere logikk, intuisjonistisk logikk el., er det også trivielt at vi ikke kan utlede 'Con_S' siden enhver intuisjonistisk el. slutningsregel også er en slutningsregel i klassiske logikk. Spesielt har vi at $N \nvdash Con_T$ for enhver rekursiv konsistent utvidese $N \subseteq T$ slik at T oppfyller (D1)-(D3).

$\square$

ω-ufullstendighet - 'Con_T' er en gödelsetning. Dersom T er ω-konsistent utvidelse av N. Da er $T \nvdash \neg Con_T$.

Bevis. Anta at T er ω-konsistent. Vi vet at dette impliserer at T er konsistent, altså $T \nvdash \bot$. Dette vil si at $\ulcorner \bot \urcorner \notin \mathsf{Thm_T}$, som er det samme som at $\langle \bar{n}, \overline{\ulcorner \bot \urcorner} \rangle \notin \mathsf{Deduksjon_T}$ for ethvert tall $n \in \mathbb{N}$, som igjen er ekvivalent med $T \vdash \neg Deduksjon_T(\bar{n}, \overline{\ulcorner \bot \urcorner})$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Anta nå for kontradiksjon at $T \vdash \neg Con_T$. Siden

$$Con_T \equiv \neg Thm_T(\overline{\ulcorner \bot \urcorner}) \equiv \neg \exists x Deduksjon_T(x, \overline{\ulcorner \bot \urcorner})$$

er $\neg Con_T \equiv \exists x Deduksjon_T(x, \overline{\ulcorner \bot \urcorner})$, og dermed er T ω-inkonsistent, mot antagelsen at T er ω-konsistent.

$\square$

Con_T er ekvivalent med enhver gödelsetning for T. La T være en rekursiv utvidelse av N som oppfyller (D1)-(D3). Da er 'Con_T' ekvivalent med enhver gödelsetning for T.

Bevis. Dette beviset er nesten likt beviset vi brukte for Gödels andre. Vi bruker $\Box\theta \equiv Thm_T(\overline{\ulcorner \theta \urcorner})$.

1.	$\theta \leftrightarrow \neg\Box\theta$	Selvref.
2.	$\theta \rightarrow \neg\Box\theta$	PC, 1
3.	$\theta \rightarrow (\Box\theta \rightarrow \bot)$	PC, 2
4.	$\Box(\theta \rightarrow (\Box\theta \rightarrow \bot))$	D1, 3
5.	$\Box\Box\theta \wedge \Box(\Box\theta \rightarrow \bot) \rightarrow \Box\bot$	D3
6.	$\Box\theta \rightarrow \Box(\Box\theta \rightarrow \bot)$	D3, 4
7.	$\Box\theta \wedge \Box\Box\theta \rightarrow \Box\bot$	PC, $5, 6$
8.	$\Box\theta \rightarrow \Box\Box\theta$	D2
9.	$\Box\theta \rightarrow \Box\bot$	PC, $7, 8$
10.	$\bot \rightarrow \theta$	PC
11.	$\Box(\bot \rightarrow \theta)$	D1, 10
12.	$\Box\bot \rightarrow \Box\theta$	D3, 11
13.	$\Box\bot \leftrightarrow \Box\theta$	D3, $9, 12$
14.	$\theta \leftrightarrow \neg\Box\bot$	PC, $1, 13$
15.	$\theta \leftrightarrow Con_T$	$\equiv, 14$

$\square$

Det følger da fra Gödels første at $T \nvdash Con_T$ og $T \nvdash \neg Con_T$ uavhengig av ω-konsistens så lenge $N \subseteq T$ oppfyller (D1)-(D3).

Beviset er tatt med fordi det sier noe om matematisk selvreferanse. Setningen 'Con_T' er i utganspunktet ikke generert av selvreferanselemmaet og refererer heller ikke til seg selv slik de andre gödelsetningene gjør. Gödelsetninger er mao. ikke av natur selvrefererende. Til tross for dette kan vi formelt vise at 'Con_T' er en gödelssetning, altså at $T \vdash Con_T \leftrightarrow \neg Thm_T(\ulcorner Con_T \urcorner)$. Vi hopper over beviset. Vanlig selvreferanse er vanskelig å forstå. En burde kanskje la være å prøve å oversette matematisk selvreferanse til selvreferanse i metaspråket all den tid det en formel høyst kan sies å referere til er sitt eget navn, og ikke til seg selv. Nok om det.

Vi ser nå at det er ganske lett å bevise gödelsetninger. Dersom T er en konsistent rekursiv utvidelse av N som oppfyller (D1)-(D3) kan vi utvide T med 'Con_T'. Siden formelen 'Con_T' har en bestemt form, er det lett å få en maskin til å legge til denne setningen, og følgelig vil $T \cup Con_T$ være en rekursiv og konsistent utvidelse av T som oppfyller (D1)-(D3). Siden enhver gödelsetning for T er beviselig ekvivalent med 'Con_T', kan vi dermed bevise enhver gödelsetning for T. For å vise at denne teorien er konsistent må vi utvide en gang til til $T \cup Con_T \cup Con_{Con_T}$. En slik itererende prosedyre vil følge oss gjennom det transfinite og inn i det hinsidige.

Vi runder av med en morsom konsekvens av Gödels andre ufullstendighetsteorem, nemlig at hvis vi antar at aritmetikk er konsistent, da kan vi, hvis vi vil, anta at aritmetikk er inkonsistent, og fremdeles ha en konsistent mengde aksiomer!

$$T \nvdash \perp \Longrightarrow T \cup \{\neg Con_T\} \nvdash \perp$$

Bevis. Hvis en ser på den kontrapositive versjonen av påstanden, ser en at det sier at dersom en kan slutte $\perp$ fra T, kan en slutte $\perp$ fra en utvidelse av T, som åpenbart stemmer uavhengig av hva en utvider med. $\square$

15 Coda

Hva nå? Hva skal vi si om Hilberts andre problem? La oss først se på noen tekniske problemer. Slik vi har framført Gödels andre og diverse konsekvenser av dette teoremet er det fremdeles mulig at $N \vdash Con_N$. Vi har brukt at aksiomene er kraftige nok til at vi kan vise (D1)-(D3) og vi hevdet at Σ_1-induksjon var tilstrekkelig for nettopp dette. Finnes det et intervall av aksiommengder $T \subseteq N \subseteq S \subset I\Sigma_1$ slik at S er tilstrekkelig for å uttrykke 'Con_S' og $S \vdash Con_S$? Er det tilfellet at $N \subseteq S \subset I\Sigma_1 \Rightarrow S \nvdash Con_S$ for enhver konsistent og rekursiv utvidelse av N? Hvor matematisk eller filosofisk interessante er egentlig slike teorier? Vi vet at selvreferanse lemmaet gjelder i enhver utvidelse av N. Er N den nedre grensen slik at enhver fjerning av aksiomer fra N leder til at lemmaet ikke holder? Hvis gödelsetninger ikke er essensielt selvrefererende, kan en da bytte ut selvreferanselemmaet? Vi sier at formelen 'Con_T' uttrykker at T er konsistent. Finnes det andre måter å lage en formel som uttrykker at T er konsistent enn den vi brukte? Er det da tilfellet at $T \nvdash Con_T$ for alle formler 'Con_T' som rimeligvis kan sies å uttrykke at T er konsistent? La dette vær nok tekninske spørsmål. Poenget er at alt er ikke sagt.

Dette var spikeren i kista for Hilberts program, 'finitisme'. Fram til og med Cantor tenkte en på uendeligheter som *potensielle* i motsetning til broderparten av matematikere etter Cantor som har tenkt på uendeligheter som *aktuelle*. Det at alle naturlige tall har en eller annen egenskap kan bety hhv. 'uansett hvor langt oppigjennom tallrekken vi karrer oss, så vil en kun støte på tall med egenskapen', og 'for hvert naturlig tall a, uansett om jeg har klart eller klarer å karre meg helt opp til a eller ei, så er det sant at a har egenskapen'. Med uendelighetsproblemet som kjerne oppstod det flere retninger som mente at en del vanlige matematiske utsagn var meningsløse, eller de mente at noen sluttningsregler, særlig kontradiksjonsbevis for å vise eksistensutsagn måtte bannlyses.

Hilberts idé var at hvis en kan bevise at aritmetikk er konsistent fra en basis av aksiomer alle godtar, og ved kun å bruke det minste felles multiplum av sluttningsregler, da er spørsmål om uendeligheter og kontradiksjonsbevis ikke lenger matematisk interessante. Målet ble således å bevise at Peano aritmetikk var konsistent i en svakere teori enn PA. Vi har vist at Gödels andre ufullstendighetsteorem impliserer at dette programmet er nødt til å strande.[50]

Hvis en da fremdelses synes at det er ubehagelig at vi ikke kan bevise at aritmetikk er konsistent, hva da? Det første vi kunne prøvd oss med var at $PA \nvdash \bot \iff \exists\mathfrak{A}[\mathfrak{A} \models PA \wedge \mathfrak{A} \not\models \bot]$. Siden vi vet at $\mathfrak{N}$ er en modell for PA, og ingen modell oppfyller '$\bot$' per definisjon, burde vi være i mål. Den som allerede var skeptisk til aritmetikkens velskapthet vil antageligvis også være skeptisk til at vi har robuste nok intuisjoner til å på stående fot avgjøre at ikke $PA \models \bot$. Hvis en først var vrang, nyttet vel lite at vi påstod at $\mathfrak{N}$ eksisterte, og dermed at $PA \not\models \bot$. En slik vriompeis ville høyst sannsynlig kreve at vi viste ved enkle og innlysende midler at $PA \not\models \bot$. Han ville sannsynlig kreve at vi *utledet* at vi aldri kan slutte $\bot$ ved å anta PA. Han ville med andre ord høyst sannsynlig skulet olmt på oss og spurt om vi ikke visste om Gödels andre.

Nå viser det seg at en *kan* bevise at matematikk er konsistent. Spørsmålet er da hva en må anta for å slutte noe så vakkert og skinnende. I lys av Gödels andre og dets derivater er det beste forslag å prøve å skrenke inn aksiomene samtidig som vi utvider dem. Siden vi ønsker å være rasjonelle, aksepterer vi at vi ikke kan bevise at aritmetikk er konsistent innenfor (en delteori av)

[50]For de som ønsker en litt mer nyansert framstilling, anbefales [6] og [18].

aritmetikk, men kanskje kan vi bevise at aritmetikk er konsistent i en teori som i seg selv ikke er tilstrekkelig for aritmetikk, men tilstrekkelig for å vise at aritmetikk er konsistent. Problemet er at hvis en først begynte å tvile over noe ganske uskyldig, da er det tvilsomt at tvilen forsvinner ved å anta noe tvilsomt mindre uskyldig. Faktisk viser det seg at vi må anta det som kalles *transfinit induksjon*, altså ikke bare induksjon på de naturlige tallene, $0, 1, 2, 3 \ldots$, med videre oppover og oppover og oppover.... Sekvensene vi må gjøre induksjon over er

$$\begin{array}{l}
0, 1, 2, 3, 4, \ldots \\
\omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \omega + 4, \ldots \\
2 \cdot \omega, 2 \cdot \omega + 1, 2 \cdot \omega + 2, 2 \cdot \omega + 3, 2 \cdot \omega + 4, \ldots \\
\vdots \\
\omega^\omega, \omega^\omega + 1, \omega^\omega + 2, \omega^\omega + 3, \omega^\omega + 4, \ldots \\
2 \cdot \omega^\omega, 2 \cdot \omega^\omega + 1, 2 \cdot \omega^\omega + 2, 2 \cdot \omega^\omega + 3, 2 \cdot \omega^\omega + 4, \ldots \\
\vdots \\
\omega^{\omega^\omega}, \ldots \\
\omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots \\
\omega^{\omega^{\omega^{\omega^\omega}}}, \ldots \\
\vdots
\end{array}$$

helt opp til grensen ϵ_0 som er det minste ordinaltallet slik at $\epsilon_0 = \omega^{\epsilon_0}$.[51]

[51]Gerhard Gentzen beviste i 1936 at aritmetikk er konsistent gitt at en tillater transfinit induksjon opp til ϵ_0. Hans artikkel 'The concept of infinity in mathematics' [8] er en fin popularisering av idéen bak beviset samt finitisme/konstruktivisme posisjonene. George Boolos' artikkel 'Gödel's Second Incomleteness Theorem Explained in Words of One Syllable' [2] er også en fin liten populariserende artikkel av Gödels andre.

Vi rekapitulerer:

Löwenheim-Skolem - Nedover. Anta at $|\mathcal{L}| \leq \kappa$, der κ er et uendelig kardinaltall og $\mathfrak{B}$ er en $\mathcal{L}$-modell. Da finnes det en modell $\mathfrak{A}$ slik at $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ og $|A| \leq \kappa$.

Löwenheim-Skolem - Oppover. La $|\mathcal{L}| \leq \kappa$ og $\mathfrak{A}$ være en uendelig $\mathcal{L}$-modell. Da har $\mathfrak{A}$ en elementær ekstensjon, $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, slik at $\kappa \leq |B|$.

Gödels første ufullstendighetsteorem. Anta at A er en konsistent og rekursiv mengde aksiomer i språket $\mathcal{L}_{NT}$. Da finnes det en setning, θ, med minimum Π-kompleksitet slik at $\mathfrak{N} \models \theta$, og $A \nvdash \theta$.

Ufullstendighet propper. Anta at A er en konsistent, rekursiv utvidelse av N. Dersom $\mathfrak{N} \models A$, da finnes det en setning θ slik at $A \nvdash \theta$ og $A \nvdash \neg\theta$.

Turings teorem - Entscheidung. Dersom A er en konsistent mengde aksiomer i språket $\mathcal{L}_{NT}$ som utvider N, da er $\mathsf{Thm_A}$ ikke representerbar i A, og derfor ikke en rekursiv mengde.

Tarskis teorem. Mengden $\mathsf{Sannl}\mathfrak{N} = \{\ulcorner\alpha\urcorner \mid \mathfrak{N} \models \alpha\}$ er ikke definerbar i $\mathfrak{N}$.

ω-konsistens og ufullstendige aksiommengder. Dersom A er en ω-konsistent, og rekursiv utvidelse av N, da er A ufullstendig.

Rossers teorem. Hvis A er en rekursiv, konsistent mengde $\mathcal{L}_{NT}$-aksiomer som utvider N, da er A ufullstendig.

Gödels andre ufullstendighetsteorem. Dersom Peano aritmetikk er konsistent, da kan en ikke bevise dette fra PA. I symboler:

$$PA \nvdash \perp \Longrightarrow PA \nvdash Con_{PA}$$

Vi kan ikke beskrive det vi vil, bevisbarhet er ikke avgjørbart, sannhet er ikke definerbart, og det finnes ingen, tilstrekkelig for aritmetikk, mengde aksiomer som vi kan utlede alt vi ønsker fra, og hvis vi skulle slumpe til å utlede det vi ønsker aller mest, da kan vi også bevise alt vi ikke ønsker.

Sic transit gloria matematici somnii.

Referanser

[1] Alfsen, Erik, Tom Lindstrøm. *Innføring i klassisk tallteori.* http://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT4000/v09/undervisningsmateriale/Tall4000.pdf, (2008).

[2] Boolos, George. 'Gödel's Second Incomleteness Theorem Explained in Words of One Syllable' Mind 103, (1993):1-3.

[3] Ebbinghaus, Heinz-Dieter, Jörg Flum og Wolfgang Thomas. *Mathematical Logic.* New York: Springer-Verlag, 1984.

[4] Enderton, Herbert. *A Mathematical Introduction to Logic.* San Diego: Academic Press, 1972.

[5] Ewald, William (ed.). *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics, vol.2.* Oxford: Oxford University Press, 1996.

[6] George, Alexander, Daniel Velleman. *Philosophies of Mathematics* Malden: Blackwell Publishing, 2002.

[7] Gentzen, Gerhard. *The collected papers of Gerhard Gentzen* Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1969.

[8] Gentzen, Gerhard. 'The concept of infinity in mathematics' i [7] 223-233.

[9] Gödel, Kurt. *Collected Works, Vol. 1: Publications 1929-1936.* Oxford: Oxford University Press. 1986.

[10] Gödel, Kurt. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I', Monatshefte für Mathematik und Physik 38, (1931): 173-198, i [9] 144-195.

[11] Hilbert, David. 'Mathematische Probleme'. Nachrichten der Koniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, (1900): 253-97, delvis versjon oversatt i [5] 1096-1105.

[12] Kristiansen, Lars. 'Turings teorem og myten om en tese'. NORMAT (Nordisk matematisk tidsskrift) 46, (1998): 76-87.

[13] Leary, Christopher. *A Friendly Introduction to Mathematical Logic.* New Jersey: Prentice Hall, 2000.

[14] Machover, Moshé. *Set Theory, Logic and their Limitations.* Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

[15] Niven, Ivan. *Reelle tall.* Oslo: J.W.Cappelens forlag 1967.

[16] Putnam, Hilary. 'Models and Reality'. The Journal of Symbolic Logic 45, (1980): 464-482.

[17] Shapiro, Stuart. *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology.* Oxford: Oxford University Press 1997.

[18] Shapiro, Stuart. *Thinking about mathematics: The Philosophy of Mathematics.* Oxford: Oxford University Press, 2000.

[19] Tarski, Alfred, Robert L. Vaught. 'Arithmetical extensions of relational systems'. Compositio Mathematica 13, (1956): 81-102.

[20] Quine, Willar Van Orman. *Mathematical Logic.* Revidert utgave. New York: Harvard University Press, 1951.