Frode Rønning

Hvor mange kanter har en firedimensjonal terning?

Tittelen på denne artikkelen er inspirert av fortellingen til Bergius og Emanuelsson (2008) om deres elever i årskurs 2 som arbeider med problemet *Hur många prickar har en gepard?* Bergius og Emanuelsson skriver:

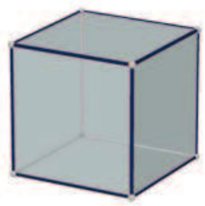
> «Vi vill utröna hur många prickar en gepard har och försöker att få eleverna att arbeta som «matematiker». Vi formulerar ett problem, diskuterar angrepssätt, och funderar över hur vi kan gå till väga genom att på olika sätt undersöka hypoteser.» (s. 29)

På hvilken måte er mitt spørsmål likt eller forskjellig fra spørsmålet som elevene i klassen til Bergius og Emanuelsson arbeidet med? For elevene var det ikke opplagt hvordan de skulle finne svar på spørsmålet; heller ikke om det fantes et entydig svar, for det kunne jo tenkes at ikke alle geparder hadde like mange prikker. Kanskje kan mye av det samme sies om spørsmålet som angår firedimensjonale terninger? Imidlertid er situasjonene ulike på ett viktig punkt – eksisterer virkelig det objektet som spørsmålet angår? For elevene var det ingen tvil om at geparder eksisterer; de kunne se bilder av dem, kanskje film, og kanskje noen også hadde sett en gepard i en dyrepark. Men eksisterer en firedimensjonal terning, og hvordan ser den i tilfelle ut? Dette spørsmålet utgjør starten på Reuben Hersh (1997) sin bok «What is Mathematics, *Really*?» og var det som fikk meg til å fatte interesse for dette.

Den firedimensjonale terningen er et eksempel på et matematisk objekt, og et grunnleggende spørsmål som kan stilles om alle matematiske objekter er «på hvilken måte eksisterer de?» Alle barn vil fra de er svært små leke med klosser som er formet som terninger. Senere vil de kanskje bygge terninger av plastbrikker eller brette terninger av papir. Uansett hvor nøyaktig dette gjøres vil disse objektene aldri ha 12 nøyaktig like lange sidekanter eller vinkler som er nøyaktig 90 grader ved alle hjørnene. Ja, men da er de vel strengt tatt ikke terninger? Figur 1 er laget ved å bruke menyvalget «Terning» i dataprogrammet Cabri 3D. Er det da en terning? Kanskje vil noen si at dette er bare et bilde av en terning, mens de treklossene som barna leker med, de er virkelige terninger. Hva er det i så fall som gjør at treklossen aksepteres som en terning mens figuren ikke gjør det? I matematisk forstand er både treklossene og figuren representasjoner av begrepet tredimensjonal terning. Ifølge Duval (2006) er et kjennetegn ved de matematiske objektene at de kun

Frode Rønning
NTNU
frode.ronning@plu.ntnu.no

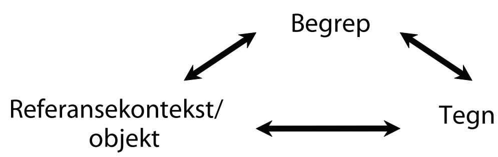
er tilgjengelige gjennom sine representasjoner, og at man dermed aldri direkte kan erfare de matematiske objektene. Representasjonene kan ha ulik karakter; treklossene er virkelig tredimensjonale objekter mens figuren er todimensjonal. Treklossene er fysiske gjenstander som vi kan ta på og holde i, mens figuren er lyspunkter på en dataskjerm eller trykksverte på et papir. Kanskje det er dette konkrete aspektet ved treklossen som gjør det lettere å akseptere den som en terning?



Figur 1

En annen mulig representasjon av terningen er det såkalte Schläfli-symbolet {4, 3} (Coxeter, 1963/1973). I dette er det underforstått at det handler om et regulært polyeder, og tallene 4 og 3 henviser henholdsvis til at sideflatene er kvadrater og at tre kvadrater møtes i hvert hjørne. En annen representasjon, fortsatt under forutsetning av regulært polyeder, kan være å angi antall hjørner (V), kanter (E) og flater (F)[1]. Da blir terningen representert ved $(V, E, F) = (8, 12, 6)$. De to siste eksemplene på representasjoner av terningen innebærer bruk av tegn, og kanskje kan man også regne den todimensjonale figuren som et tegn. Den amerikanske matematikkfilosofen Charles Sanders Peirce (1834–1914) skiller mellom *ikoniske*, *indikative* og *symbolske* representasjoner (Peirce, 1998, s. 13). Ikoniske representasjoner kjennetegnes ved at de ligner på det de representerer, mens symbolske representasjoner representerer gjennom en konvensjon; noe vi er blitt enige om. Med denne språkbruken vil klossen og figuren være ikoniske representasjoner, fordi de formidler ideer om terningen gjennom å imitere den, mens for eksempel {4, 3} er et symbol fordi det forbindes med terningen gjennom måten det brukes på; det vil si at det er nødvendig med en forklaring for å forstå hva det betyr. De fysiske representasjonene (klosser eller andre terningformede gjenstander) kan også være konkrete referanseobjekter eller kontekster som man tenker på når man hører ordet terning. Den øvelsen som her er gjennomført med å starte med et matematisk begrep (i dette tilfellet terning) og så tenke ut ulike tegn som kan representere begrepet og også tenke ut ulike referanser til begrepet, er en øvelse som kan være interessant å gjennomføre også med andre matematiske begreper.

Steinbring (2005) illustrerer sammenhengen mellom *begrep*, *tegn* og *referanse* i den epistemologiske trekanten, vist nedenfor.



En terningformet kloss kan altså både være en referansekontekst og et tegn – en ikonisk representasjon, for å bruke språket til Peirce. Men hva er da selve begrepet *terning?* Steinbring angir to viktige aspekter for matematisk kunnskap:

- There exists a third element independent from object and sign, the concept.
- If, as happens, concrete external objects are taken in the beginning – e.g. in elementary school – as the referring objects for signs, these will be more and more superseded by mental objects and by structures etc. in the further development of mathematical knowledge. (Steinbring, 2005, s. 28–30)

Det matematiske begrepet tredimensjonal terning hører hjemme i det øverste hjørnet i den epistemologiske trekanten, og de ulike representasjonene og referansene som man kan ha adgang til, hører hjemme i de to nederste hjørnene.

Nå vil jeg gå tilbake til det spørsmålet jeg startet med, hvor mange kanter har en firedimensjonal terning? Eller mer generelt: Hvilke egenskaper har en firedimensjonal terning? Med bakgrunn i den teorien som er referert ovenfor vil spørsmålene kunne stilles litt annerledes. Hvordan kan man representere det matematiske begrepet firedimensjonal terning? Hvilke tegn eller symboler kan man bruke? Hvilke referanseobjekter kan man bruke? Det er klart at det, i det tredimensjonale rommet vi lever i, ikke er mulig å bygge en fysisk modell av en terning i fire dimensjoner, så det virker mest nærliggende å lage en symbolsk representasjon. Dette kan gjøres gjennom en abstrahering eller en generalisering av egenskapene til den tredimensjonale terningen og vil da være et eksempel på det som Steinbring uttrykker i sitt punkt 2 ovenfor – å gå fra konkrete objekter til mentale objekter og strukturer.

Konstruksjon av en firedimensjonal terning

Hvordan skal man begynne denne prosessen? Hvordan kan man generalisere fra tre til fire dimensjoner? Hvis man kommer fram til et forslag, hvordan kan man vite om det er "rett"? Er det noe som er rett, og hvem er det i tilfelle som avgjør hva som er rett? Kunne det tenkes flere måter å gjøre det på som var like riktige? Dette er spørsmål som er svært sentrale innenfor all slags utvikling av matematisk kunnskap. For å komme fram til et forslag som kan være fornuftig – jeg vil ikke nødvendigvis si at det er rett – vil det være hensiktsmessig å lete etter en struktur, et mønster. Mange vil si at det å lete etter strukturer og mønstre er det som er det karakteristiske for matematisk aktivitet. Keith Devlin (1994) uttrykker for eksempel dette i tittelen på sin bok, «Mathematics, the Science of Patterns». G. H. Hardy, en av 1900-tallets store matematikere, skriver:

> «The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's must be *beautiful;* the ideas, like the colours or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics.» (Hardy, 1940/1992, s. 85. Utheving i originalen)

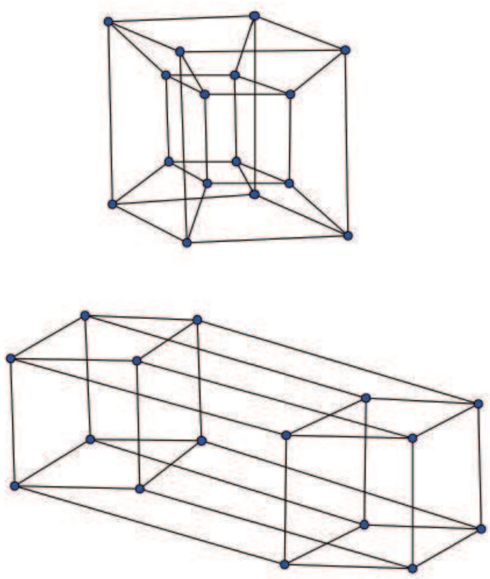
Så ikke bare skal det finnes et mønster, men mønsteret skal også være vakkert! For å finne et mulig mønster for terningen kan det være til hjelp ikke bare å se på den tredimensjonale terningen, men også den todimensjonale (kvadratet) og kanskje også den endimensjonale (linjesegmentet). Hva med den nulldimensjonale? Hva skulle det være? Det naturlige vil vel være å si at det er et punkt. Tanken nå er å lete etter en struktur i dimensjonene opp til tre og så prøve å utvide (generalisere) denne strukturen til høyere dimensjoner.

Tabell 2 viser situasjonen for dimensjonene 0 (punkt), 1 (segment), 2 (kvadrat) og 3 (terning).

Dimensjon	0	1	2	3
Flater (F)			1	6
Kanter (E)		1	4	12
Hjørner (V)	1	2	4	8

Tabell 2

For hver gang man går til et objekt i en høyere dimensjon kommer det til en ny del (komponent) av objektet, for eksempel er det ingen flater i dimensjon 1, men det blir én flate i dimensjon 2. Siden man vanligvis bare opererer i dimensjoner opp til 3, er det lett å glemme at i overgangen fra dimensjon 2 til dimensjon 3 kommer det også til en ny del, nemlig et tredimensjonalt rom. Dette er ikke synlig i Tabell 2. I utvidelsen fra 3 til 4 er det rimelig å tenke seg at det må komme til ett firedimensjonalt rom, og at det antakelig vil være flere tredimensjonale rom. Dette er det naturligvis vanskelig å se for seg fordi vi i vår fysiske virkelighet ikke har flere enn tre dimensjoner tilgjengelig. Hvis man skulle prøve å se den for seg, vil situasjonen kunne sammenlignes med det å fremstille en tredimensjonal terning i et todimensjonalt plan. For å få til en slik tegning må man bruke en eller annen form for projeksjon fra det tredimensjonale til det todimensjonale rommet (dvs. planet), som for eksempel i Figur 1. Tilsvarende går det an å tenke seg at man projiserer den firedimensjonale terningen inn i det tredimensjonale rommet ved å bygge en figur i tre dimensjoner. Akkurat som det er flere måter å projisere fra tre til to dimensjoner på, vil det være flere måter å projisere fra fire til tre dimensjoner. Figur 2 viser to måter den firedimensjonale terningen kan projiseres inn i det tredimensjonale rommet på. Det som vises er naturligvis egentlig projeksjoner videre fra tre til to dimensjoner fordi alt jo er trykket på todimensjonalt papir, men vi kan se for oss hvordan disse figurene kan bygges for eksempel ved hjelp av ståltråd.



Figur 2

Liknende figurer kan finnes i (Bergqvist, 2003), og også i klassiske bøker i geometri (f.eks. Coxeter, 1963/1973, Plate VI). Videre finnes det interaktive modeller på nettet, for eksempel på Wolfram Demonstrations Project (Wolfram, 2010).

Med den tenkningen at det i dimensjon 4 finnes ett firedimensjonalt rom og et foreløpig ukjent antall tredimensjonale rom, flater, kanter og hjørner kan Tabell 2 utvides til å bli slik:

Dimensjon	0	1	2	3	4
4D-rom (S)					1
3D-rom (R)				1	R_4
Flater (F)			1	6	F_4
Kanter (E)		1	4	12	E_4
Hjørner (V)	1	2	4	8	V_4

Tabell 3

Spørsmålet er nå hvilke tall som skal stå i stedet for symbolene R_4, F_4, E_4 og V_4. Kanskje vil mange raskt gjette at det bør være 16 hjørner, for det ser ut til å være slik at antall hjørner fordobles når man går opp en dimensjon, altså $V_4 = 16$. For å lage seg en hypotese om hvilke tall som bør komme i de andre rutene kan det være lurt å tenke seg hvordan en tredimensjonal terning kan konstrueres ut fra et kvadrat. Start med et kvadrat og lag en kopi av det. Da vil antall flater, kanter og hjørner fordobles. Løft så kopien opp fra det todimensjonale planet der originalen ligger. For å få en komplett terning må du forbinde hvert hjørne i kopien med tilsvarende hjørne i originalen. Denne prosessen gir et antall nye kanter som er likt med antall hjørner i det opprinnelige kvadratet og et antall nye flater som er likt med antall kanter i det opprinnelige kvadratet. Det er denne prosessen som også tenkes gjennomført i overgangen fra tre til fire dimensjoner og som er vist i Figur 2. Man lager altså en kopi av den tredimensjonale terningen, løfter den ut i det firedimensjonale rommet, og forbinder hvert hjørne i originalen med det tilsvarende hjørnet i kopien. Denne prosessen gir de manglende tallene i Tabell 3 ved hjelp av følgende formler.

$$\begin{aligned} V_4 &= 2V_3 = 16 \\ E_4 &= 2E_3 + V_3 = 32 \\ F_4 &= 2F_3 + E_3 = 24 \\ R_4 &= 2R_3 + F_3 = 8 \end{aligned} \qquad (1)$$

Det jeg her har kommet fram til, er en symbolsk representasjon av den firedimensjonale terningen ved hjelp av å angi antall 3D-rom, flater, kanter og hjørner, altså $(V_4, E_4, F_4, R_4) = (16, 32, 24, 8)$. Representasjonen er begrunnet ved at den kommer ut av en struktur som også «terningene» i lavere dimensjoner passer inn i, men jeg har ikke sagt at dette er den eneste strukturen man kan tenke seg.

Når jeg nå har gjennomført generaliseringen fra dimensjon 3 til 4, er det lett å gå videre til dimensjoner høyere enn 4. Det man trenger å gjøre da, er å innføre et nytt rom for hver dimensjon slik at en n-dimensjonal terning inneholder ett n-dimensjonalt rom, og videre rom av lavere dimensjoner i henhold til rekursive formler tilsvarende dem som er angitt i (1). Hvis man for hver dimensjon skulle finne på en ny bokstav for det nye rommet som oppstår, ville man etter hvert slippe opp for bokstaver, og det ville også være vanskelig å snakke generelt om det n-dimensjonale rommet. Da kan det algebraiske symbolspråket komme til nytte. Jeg velger nå å bruke kun én bokstav, S, og som tidligere sette en indeks nede for å markere hvilken dimensjon jeg er innenfor. For å kunne si om jeg tenker på hjørne, kant eller flate trenger jeg en indeks til. Den setter jeg oppe, som en eksponent, men den er altså en indeks. For å markere at den ikke er en eksponent setter jeg en parentes rundt den. Jeg bruker da 0 for hjørne, 1 for kant, 2 for flate og så videre. Med denne notasjonen blir antall hjørner i dimensjon n angitt som $S_n^{(0)}$, antall kanter i dimensjon n blir angitt som $S_n^{(1)}$, og antall flater som $S_n^{(2)}$. Dette går da opp til $S_n^{(n)}$ som betegner antall nD-rom, som altså alltid er lik 1. De rekursive formlene som gir antallet av hver komponent blir da slik

$$
\begin{aligned}
&S_n^{(0)} = 2S_{n-1}^{(0)} \\
&S_n^{(1)} = 2S_{n-1}^{(1)} + S_{n-1}^{(0)} \\
(2)\qquad &S_n^{(2)} = 2S_{n-1}^{(2)} + S_{n-1}^{(1)} \\
&\dots \\
&S_n^{(n-1)} = 2S_{n-1}^{(n-1)} + S_{n-1}^{(n-2)}
\end{aligned}
$$

Før jeg forlater selve konstruksjonen av den n-dimensjonale terningen vil jeg henlede oppmerksomheten på et bestemt fenomen. For hver dimensjon, legg sammen alle komponentene som terningen i den aktuelle dimensjonen består av. I dimensjon 0 er summen 1, i dimensjon 1 er den 1 + 2 = 3, i dimensjon 2 er den 1 + 4 + 4 = 9, i dimensjon 3 er den 1 + 6 + 12 + 8 = 27 og i dimensjon 4 er den 1 + 8 + 24 + 32 + 16 = 81. Dette gir tallfølgen $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4$. Det synes altså som at denne summen gir potenser av 3, eller helt presist 3 opphøyd i dimensjonen. Hvordan kan det ha seg at potenser av 3 opptrer i denne strukturen? Det kan stå som en utfordring for leseren å finne ut av dette. Et bevis finnes i nettversjonen av denne artikkelen; www.caspar.no/tangenten/2010/ronning-4d.pdf.

Eulers formel

I arbeid med polyedre kommer en nokså fort i kontakt med Eulers formel som sier at $V - E + F = 2$. Denne formelen kan diskuteres på mange måter, og én måte å diskutere den på er å spørre for hvilke polyedre den gjelder. Dette spørsmålet er utførlig behandlet i Imre Lakatos sin bok *Proofs and Refutations* (Lakatos, 1976), og jeg skal ikke berøre det her. En annen innfallsvinkel kan være å spørre hvordan Eulers formel vil se ut i dimensjoner forskjellig fra 3. Igjen kan det være lurt å se litt på lavere dimensjoner før man generaliserer til høyere dimensjoner.

Når barn arbeider med mangekanter og de skal avgjøre om en gitt mangekant for eksempel er en femkant eller en sekskant, observerer man ofte at det kan variere om de teller kantene eller hjørnene. Faktisk kan man også oppleve at de peker på hjørnene når de blir bedt om å telle kantene. I dette tilfellet bruker barna intuitivt Eulers formel i to dimensjoner, det vil si de bruker egenskapen $V = E$, eller $V - E = 0$. I dimensjon 1 er det to hjørner og én kant slik at formelen blir $V - E = 1$. Hvordan kan disse formlene forenes i en felles struktur? Det synes klart at tallet 2 som forekommer på høyre side i den egentlige Eulers formel må være et tall som avhenger av dimensjonen, men på hvilken måte? Slik formlene er skrevet ovenfor er det bare i dimensjon 1 at alle komponentene er med i formelen. I dimensjon 2 burde det være med én flate ($F = 1$) og i dimensjon 3 burde det være med ett 3D-rom ($R = 1$). Hvis disse størrelsene innføres, vil formlene i dimensjonene fra 0 til 3 kunne skrives slik,

$$\begin{aligned} &V = 1 \\ &V - E = 1 \\ &V - E + F = 1 \\ &V - E + F - R = 1 \end{aligned} \tag{3}$$

Ligningene i (3) har et par egenskaper felles som kan være verdt å legge merke til. Det ene er at det står 1 på høyre side av likhetstegnet i alle, og det andre er at venstre side er en alternerende sum (dvs. vekselvis pluss og minus) av alle komponentene innenfor dimensjonen. Dette vil kunne lede til en formodning om den generelle formelen

$$S_n^{(0)} - S_n^{(1)} + S_n^{(2)} - S_n^{(3)} + \ldots + (-1)^n S_n^n = 1 \tag{4}$$

Fortegnet foran det siste leddet vil være pluss eller minus avhengig av om n er et partall eller et oddetall. Det er dette som uttrykkes ved å sette faktoren $(-1)^n$ foran. Det er lett å se at denne holder også for den firedimensjonale terningen ved å sette inn tallene fra ligningene (1).

Gjelder denne formelen også i høyere dimensjoner? Den strukturen som her er utviklet for den n-dimensjonale terningen, er styrt av de rekursive formlene som er merket (2). Det som dermed må gjøres for å sjekke om formelen (4) gjelder, er å se om den følger som en konsekvens av formlene (2). Det kan for eksempel gjøres ved et induksjonsargument. Jeg vil ikke gå inn på det her, men interesserte lesere henvises til nettversjonen av denne artikkelen; www.caspar.no/tangenten/2010/ronning-4d.pdf.

Historiske kommentarer

Alt det jeg her har beskrevet om generalisering til høyere dimensjoner er kunnskap som har vært kjent lenge. Den klassiske Eulers formel for regulære polyedre var kjent av Euler på 1750-tallet (Lakatos, 1976, s. 6). Om lag 100 år senere arbeidet mange med utvidelsen av de regulære polyedre og deres egenskaper til fire dimensjoner, og en viktig person i dette arbeidet var den sveitsiske matematikeren Ludwig Schläfli som levde fra 1814 til 1895. Begrepet polytop brukes gjerne om det n-dimensjonale objektet som generaliserer polyeder i dimensjon 3 og polygon i dimensjon 2. Som en generalisering av regulære polyedre kan en da snakke om regulære polytoper, og Schläfli viste allerede rundt 1850 at det kun finnes seks regulære polytoper i dimensjon 4 (Coxeter, 1969, s. 396). Som kjent finnes det fem regulære polyedre i dimensjon 3, de såkalte platonske legemene: Tetraeder, heksaeder (terning), oktaeder, dodekaeder og ikosaeder. Selve den firedimensjonale terningen omtales ofte som en hyperkube, men dette ordet brukes også mer generelt om en n-dimensjonal terning for $n > 4$. Også Eulers formel for dimensjoner større enn 3 var kjent av Schläfli, men den ble først fullstendig bevist av Poincaré i 1893 (Coxeter, 1963/1973, s. 165). Mer informasjon om disse begrepene kan også finnes på mathworld.wolfram.com/ ved å søke for eksempel på *polytope*, *hypercube* eller *polyhedral formula*.

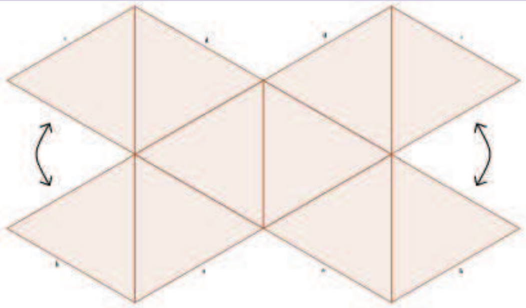
Noter

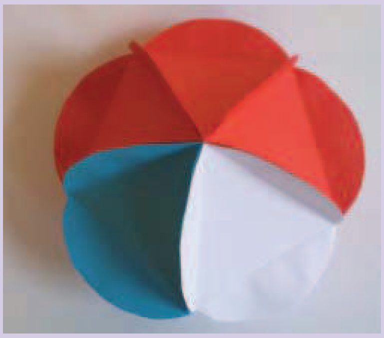
1 Denne artikkelen har også stått på trykk i det svenske Nämnaren, nr 3 i 2009 (s. 40–46).

2 Bokstavbetegnelsene *F* for flate, *E* for kant og *V* for hjørne er forkortelser for de engelske ordene *Face*, *Edge* og *Vertex*. I tråd med dette vil jeg senere bruke *R* for 3D-rom og *S* for 4D-rom inspirert av ordene *Rom* og *Space*.

(fortsetter side 17)

Dobbeltpyramide av ti trekantar





Ein kan og trekkje dei to pyramidane frå kvarandre, og setje inn ei ekstra rad med trekantar (om lag som i skissa til ikosaederet), og få fram nye figurar igjen. Utforsk og leik deg med trekantane og matematikken i dei.

Inspirasjon

Botten, Geir (2007). Forelesing 13. august 2007 ved Høgskolen i Bergen i regi av LAMIS Bergen og omegn lokallag.

Bjurstrøm, R. (2008). Desember ideer. 24 dager til glede og hygge. Tillegg til *BO BEDRE* nr. 11, 2008. Bonnier Media II AS.

(fortsatt fra side 10)

Referanser

Bergius, B., & Emanuelsson, L. (2008). *Hur många prickar har en gepard? Unga elever upptäcker matematik.* Göteborg: NCM.

Bergqvist, T. (2003). Uppslaget. Hyperkuber. *Nämnaren, 30*(1), 32–34.

Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to geometry* (2. utg.). New York: John Wiley & Sons.

Coxeter, H. S. M. (1973). *Regular polytopes.* New York: Dover. (Originalen publisert i 1963)

Devlin, K. (1994). *Mathematics. The science of patterns.* New York: Scientific American Library.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61,* 103–131.

Hardy, G. H. (1992). *A mathematician's apology. With a foreword by C. P. Snow.* Cambridge: Cambridge University Press. (Originalen publisert i 1940)

Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* Oxford: Oxford University Press.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery.* Cambridge: Cambridge University Press.

Peirce, C. S. (1998). *The essential Peirce. Selected philosophical writings. Vol. 2 (1893–1913).* (Redigert av the Peirce Edition Project). Bloomington, IN: Indiana University Press.

Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction. An epistemological perspective.* New York: Springer.

Wolfram (2010): demonstrations.wolfram.com/ProjectionsOfTheFourCube/